АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР

ЭНЦИКЛОПЕДИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
П. С. АЛЕКСАНДРОВА,
А. И. МАРКУШЕВИЧА
и А. Я. ХИНЧИНА

КНИГА ПЕРВАЯ

АРИФМЕТИКА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1951 ЛЕНИНГРАД

В. М. БРАДИС

УСТНЫЙ И ПИСЬМЕННЫЙ СЧЁТ. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СРЕДСТВА ВЫЧИСЛЕНИЙ

*

ГЛАВА I

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СЧЁТЕ И ПРИБЛИЖЁННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

§ 1. Общие соображения об изучении счёта в школе

Слово «счёт» употребляется в двух смыслах. Во-первых, счёт как операция, имеющая целью установить, сколько элементов содержит данное конечное множество; во-вторых, счёт как совокупность первых четырёх арифметических действий, производимых над рациональными числами целыми и дробными, т. е. счёт-вычисление. В настоящей статье речь идёт о счёте-вычислении, но, кроме первых четырёх арифметических действий, имеются в виду и некоторые другие операции над числами, с которыми имеет дело курс математики в средней школе.

Изучению счёта посвящён почти целиком курс математики I—V классов советской школы. Действующая ныне программа предполагает, что окончившие пять классов нуждаются по части счёта только в усвоении логарифмического метода вычислений, которому уделяется довольно много времени в IX классе, и никаких других вопросов, относящихся к теории и практике вычислений, не затрагивает. Не двигаясь в старших классах в этом направлении вперёд, учащиеся постепенно частично теряют и те немногие вычислительные знания и навыки, какие они приобрели в младших классах, и естественно, что вузы, особенно технические, нередко жалуются на недостаточную подготовку оканчивающей среднюю школу молодёжи в области вычислительной культуры.

Изучая математику, нельзя не рассматривать практических её приложений, а заключительной стадией решения любого практического вопроса, требующего применения математики, являются численные выкладки. Научить производить такие выкладки правильно, быстро, без напрасной траты времени и сил — несомненно, одна из задач общеобразовательного курса математики. Некоторый минимум хороших и прочных навыков вычислительной работы нужен каждому культурному человеку. Этот минимум существенно расширяется для всех технических специальностей, в том числе и для большинства военных, для всех физико-математических, а в несколько меньшей мере и для всех естественно-научных дисциплин. Не следует также упускать из вида и воспитательное значение правильно поставленной вычислительной работы. На ней особенно хорошо развивается чувство ответственности, вырабатываются навыки самоконтроля, умения обнаруживать и исправлять свои ошибки, умения сосредоточенно работать, надлежащим образом рационализируя каждый свой шаг.

В области вычислительной техники наша средняя школа отстаёт от жизни. К примитивным арифметическим навыкам она добавляет только умение пользоваться логарифмическим методом вычисления. Между тем применение логарифмов давно уже потеряло тот универсальный характер, какой оно имело в XVIII и XIX вв.: на смену логарифмам пришли счётная логарифмическая линейка, получившая за последние полвека самое широкое распространение во всех случаях, когда точность в 3—4 значащих цифры оказывается достаточной, и различные счётные машины, дающие возможность получать результаты с произвольно высокой точностью, а также номограммы, поразительно ускоряющие работу вычисления по определённым формулам.

Существует ряд математических таблиц, вполне доступных даже учащимся семилетней школы и существенно облегчающих повседневную вычислительную работу, но фактически используемых в школе очень редко (таблица квадратов, кубов, корней квадратных и кубических, обратных значений, длины окружности, площади круга и др.).

Есть ещё одна важная сторона этого отрыва школьной вычислительной математики от жизни. Школа учит операциям над числами, которые предполагаются точными, между тем как в подавляющем большинстве случаев числа, с которыми приходится иметь дело на практике, лишь приближённо выражают точные, но неизвестные нам значения реальных величин. Можно точно сосчитать количество предметов в небольшом их собрании, но уже точный подсчёт более или менее значительного их множества представляет серьёзные, часто непреодолимые затруднения, и приходится довольствоваться выяснением лишь приближённых значений численности таких множеств. Что же касается измерений, то они всегда дают только приближённые значения измеряемых величин. В связи с этим неизбежно возникают такие вопросы: как оценить точность данного приближённого числа (т. е. числа, приближённо выражающего точное значение рассматриваемой величины)? Как оценить точность результата вычисления с приближёнными числами? Какова должна быть точность данных, чтобы результат вычисления с ними имел некоторую наперёд указанную точность? Как наиболее рационально производить действия над приближёнными числами?

На все эти вопросы школьный курс математики ответа не даёт. Представляется совершенно необходимым значительное обновление школьных программ в разделах, посвящённых вычислительной работе, и нет сомнения, что это обновление не за горами. Но и в рамках действующих ныне программ учитель может сделать многое для повышения вычислительной культуры своих учеников, если, разумеется, сам обладает соответствующими знаниями и навыками.

Краткому обзору этого материала и посвящается настоящая статья. Три ближайших её параграфа рассматривают точные вычисления, все последующие — вычисления приближённые. Объём статьи заставляет ограничиваться лишь идейной, принципиальной стороной затрагиваемых вопросов и минимумом поясняющих примеров. Читателя, желающего ознакомиться с деталями, приходится отсылать к литературе, указанной в конце статьи. Ссылки на литературу делаются в тексте статьи посредством указания соответствующих номеров в прямоугольных скобках.

§ 2. Счёт устный

Общепринятые в настоящее время приёмы выполнения арифметических действий над многозначными натуральными числами, выраженными в десятичной системе счисления, сводятся в конечном итоге к применению табличек сложения и умножения однозначных чисел, заучиваемых наизусть, и предполагают запись данных, а также постепенную запись получаемых результатов как промежуточных (например, частных произведений при умножении), так и окончательных. Счёт называется «устным» или «умственным», если он ведётся без какой бы то ни было записи. Навыки такого счёта представляют собой большую ценность и в чисто практическом отношении, так как используются в быту несравненно чаще, чем письменные выкладки, и в отношении развития тех способностей, какие культивируются изучением математики вообще: сообразительности, внимательности, инициативы и т. д. В то время как обычные письменные вычисления производятся по строго определённым правилам и представляют собой работу в значительной степени механическую, устный счёт оставляет большой простор для изобретательности и наблюдательности и предъявляет серьёзные требования к вниманию и навыкам самоконтроля. Промежуточное положение между устным и письменным счётом занимает счёт «полуписьменный», когда записываются только данные и окончательный результат. Резкой границы между устным и полуписьменным счётом провести, однако, нельзя, и мы не будем в дальнейшем различать их.

Обычно в I—IV классах учащиеся овладевают простейшими приёмами устного счёта над натуральными числами, не превосходящими 100, и над дробями с такими знаменателями, как 2, 4, 8, 3, 6, 10. В дальнейшем эти навыки не развиваются и даже не используются, а в силу этого естественно теряются. Нередко мы видим, как выпускники средней школы тянутся за карандашом и бумагой, чтобы найти сумму двух двузначных натуральных чисел. Представляется целесообразным выдвинуть относительно устного счёта следующие три требования.

а) Необходимо приучать учащихся всех классов средней школы выполнять в уме всякую выкладку, где это возможно без особого напряжения, в частности, производить в уме все четыре действия над натуральными числами в пределах ста. Наибольшие трудности доставляет здесь умножение двузначных чисел, но и они преодолеваются при небольшой тренировке в применении известного правила «умножения крест-на-крест». Например, умножая 53 на 74, сначала берут произведение единиц ($3\cdot 4=12$), цифру 2 записывают, а один десяток запоминают; далее находят произведение десятков на единицы ($5\cdot 4=20$) и единиц на десятки ($3\cdot 7=21$), берут сумму $1+20+21=42$ (десятка), цифру 2 записывают левее уже записанной цифры 2, цифру 4 (сотни) запоминают; наконец, находят произведение десятков на десятки ($5\cdot 7=35$) и сумму $35+4=39$ записывают левее записанного ранее числа 22, получая в итоге произведение 3922.

Конечно, здесь, как и везде, должна соблюдаться разумная мера.

б) Желательно всячески культивировать разнообразные частные приёмы устного счёта, использующие индивидуальные свойства чисел, а также законы переместительный, сочетательный, распределительный и изменение результатов в зависимости от изменения данных. Подобные приёмы дают весьма заметную экономию (не только мела, а и мозговой энергии!) по сравнению с общими приёмами. Вот несколько примеров (подробная запись приведена только с целью разъяснения приёмов):

$$32\,704\cdot 25=3\,270\,400:4=817\,600,$$

так как

$$a\cdot 25=(a\cdot 100):4;$$

$$47+48+49+50+51+52+53+54=$$
$$=(47+54)+(48+53)+(49+52)+(50+51)=101\cdot 4=404;$$

$$735+99=735+100-1=835-1=834;$$

$$15\frac{1}{2}+32\frac{7}{16}+1\frac{1}{3}+2\frac{1}{6}=$$
$$=(15+32+1+2)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\frac{7}{16}=50+1+\frac{7}{16}=51\frac{7}{16};$$

$$14\frac{3}{4}\cdot 8=\left(14+\frac{3}{4}\right)\cdot 8=14\cdot 8+\frac{3}{4}\cdot 8=112+6=118;$$

$$135\frac{3}{7}:15=\left(135+\frac{3}{7}\right):15=135:15+\left(\frac{3}{7}:3\right):5=9+\frac{1}{7}:5=9\frac{1}{35}.$$

в) Желательно пополнять этот запас частных приёмов, используя по мере ознакомления с ними различные формулы алгебры, а также выводя некоторые новые практически ценные формулы. Вот несколько примеров:

$$54 \cdot 46 = (50 + 4) \cdot (50 - 4) = 50^2 - 4^2 = 2484;$$

$$97^2 = (100 - 3)^2 = 10\,000 - 600 + 9 = 9409;$$

при $b + c = 10$

$$(10a + b)(10a + c) = 100a(a + 1) + bc,$$

а потому, например,

$$9993 \cdot 9997 = 100 \cdot 999 \cdot 1000 + 3 \cdot 7 = 99\,900\,021;$$

$$82 \cdot 88 = 100 \cdot 8 \cdot 9 + 16 = 7216;$$

$$(10 + a)(10 + b) = 100 + 10(a + b) + ab,$$

поэтому, например,

$$13 \cdot 16 = 100 + 10 \cdot 9 + 18 = 208;$$

иначе

$$13 \cdot 16 = 16 \cdot 10 + 16 \cdot 3 = 160 + 48 = 208;$$

$$\sqrt{74^2 - 70^2} = \sqrt{144 \cdot 4} = 12 \cdot 2 = 24.$$

Отметим в заключение настоящего параграфа следующее правило, которого с большой выгодой для воспитания хороших вычислительных навыков придерживаются некоторые учителя: учащиеся любого класса, выполняя каждую числовую выкладку, начинают с грубо приближённой оценки искомого результата, округляя все данные до одной-двух значащих цифр и выполняя все действия в уме. Так, если требуется найти

$$x = \sqrt{0{,}0045 \cdot 7{,}5132 : (2{,}0719 \cdot 0{,}864)},$$

то сначала в уме находят:

$$x \approx \sqrt{0{,}004 \cdot 8 : (2 \cdot 0{,}9)} = \sqrt{0{,}016 : 0{,}9} = \sqrt{0{,}16 : 9} = 0{,}4 : 3 \approx 0{,}13,$$

а затем уже письменно получают более точное значение (в данном случае, если ограничиться четырьмя значащими цифрами, $x \approx 0{,}1374$). Такая «прикидка» существенно предупреждает грубые просчёты и очень ценится инженерно-техническими работниками.

Желающим детальнее изучить приёмы устного счёта рекомендуется обратиться к работам [1], [2a], [3], [4].

§ 3. Счёт письменный

С письменными выкладками над числами как целыми, так и дробными дело в школе обстоит несравненно благополучнее, чем с устным счётом. Изучаемые в школе общепринятые в настоящее время алгорифмы (схемы выполнения и записи) действий над многозначными числами являются лучшими из многочисленных предложенных в разное время вариантов; усваиваются они в подавляющем большинстве случаев достаточно твёрдо ещё в начальной школе. Обычный курс математики семилетней и средней школ даёт достаточно случаев применять их и обеспечивает сохранение технических навыков. По поводу письменного производства действий над многозначными целыми числами можно высказать всё же несколько пожеланий методического характера.

а) Знакомя учащихся с переместительным, сочетательным, распределительным свойствами суммы и разности, надо выяснять, как эти свойства используются в обычных алгорифмах сложения и вычитания многозначных чисел; делается это либо при повторении арифметики, либо на первых шагах изучения алгебры. Весьма важно, чтобы учащиеся не только безупречно владели механизмом действия, но и понимали бы теоретическую базу этого алгорифма, остающуюся по необходимости далеко не полностью уяснённой при первоначальном знакомстве с этим действием. Весьма поучительно проведение подобной работы и над действиями умножения и деления.

б) Требуя аккуратной записи всегда и везде, приходится обращать особое внимание на эту сторону дела при выполнении действий над многозначными числами и над дробями. Нельзя допускать небрежной записи выкладок в черновиках; такая запись — один из постоянных источников ошибок, механически повторяемых при переписке набело.

в) Требуя от учащихся, чтобы они не допускали вычислительных ошибок, надо приучать их к рациональным способам проверки своих выкладок. Никакое вычисление нельзя считать законченным, пока не сделана тем или иным способом проверка. Сложение обычно проверяют сложением же, но выполняемым в ином порядке; вычитание — сложением, умножение — умножением же (при перемене мест сомножителей), деление — умножением делителя на частное и прибавлением остатка, если он есть, извлечение корня — возведением в степень.

Очень полезна проверка с помощью чисел 9 и 11, основанная на замене данных их остатками от деления соответственно на 9 и 11: выполняя над этими остатками указанные действия, мы получаем в случае безошибочности всех выкладок числа, дающие при делении на 9 и 11 те же остатки, что и найденные результаты. Числа 9 и 11 берутся делителями в силу того, что при делении на них остатки находятся особенно просто: остаток от деления на 9 любого числа, записанного в десятичной нумерации, одинаков с остатком от деления на 9 суммы цифр этого числа. Так, остаток от деления на 9 числа 4 138 097 одинаков с остатком от деления на 9 числа $4+1+3+8+0+9+7=32$ и с остатком от деления на 9 числа $3+2=5$. Остаток от деления на 11 любого числа, записанного в десятичной нумерации[1]), получается подобным же образом через вычисление «альтернирующей» суммы цифр этого числа, т. е. суммы его цифр, взятых с чередующимися знаками, начиная с цифры единиц (чтобы избежать появления отрицательных чисел, можно прибавлять 11 каждый раз, когда от меньшего числа приходится отнимать большее). Например, остаток от деления числа 4 138 097 на 11 равен остатку от деления на 11 числа $7-9+0-8+3-1+4+11=7$. Подробности о проверке девяткой можно найти в книге [5].

Отсутствие грубых просчётов легко устанавливается посредством той легко выполнимой в уме «прикидки», о которой было упомянуто выше и которую рекомендуется производить раньше полного вычисления.

г) Отметим несколько распространённых ошибок, совершаемых при письменном выполнении действий над целыми и дробными числами. Часто пропускаются нули в промежуточных разрядах частного. Например, при делении 3708 на 18 получают частное 26 вместо 206. Любопытно, что подобные ошибки не встречаются при устном выполнении действия, в данном случае так легко осуществляемом: $3708:18=(3600+108):18=200+6=206$.

Нередко искажают остаток при зачёркивании конечных нулей в делимом и делителе. Например, при делении 650 на 110 заменяют эти числа через 65 и 11 и получают правильное частное 5 и неверный остаток 10 (вместо 100).

Очень часто без всякой надобности практикуется обращение в неправильные дроби данных смешанных чисел при сложении и вычитании таких чисел. Результат от такого обращения не искажается, но выкладки существенно усложняются.

Иногда при умножении смешанных чисел ограничиваются умножением целого на целое и дроби на дробь. Например, при умножении $5\frac{2}{3}$ на $2\frac{3}{4}$ получают $5\cdot 2=10$ и $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$, всего $10\frac{1}{2}$, тогда как правильный результат есть $\frac{17\cdot 11}{3\cdot 4}=15\frac{7}{12}$.

Нечего и говорить, как поучителен основательный разбор этих и других подобных им ученических вычислительных ошибок.

д) При всяком сколько-нибудь сложном письменном вычислении делом большой важности является рациональная запись выкладок.

Неряшливая, разбросанная запись абсолютно недопустима ни при каких обстоятельствах, в том числе и в черновике. Запись должна

[1]) См. стр. 274—275, А. Я. Хинчин, «Элементы теории чисел».

быть ясной: не только сам вычисляющий, но и другой человек должен иметь возможность легко в ней разобраться. Она должна быть достаточно полной, но экономной, содержа всё необходимое и ничего излишнего. Очень полезно предварительное составление схемы, т. е. такая разметка листа бумаги, производимая до вычисления, при которой каждое получаемое в процессе вычисления число попадает на своё, вполне для него определённое место. Те вспомогательные вычисления, какие нельзя выполнять в уме, проводятся на особом отведённом для них месте. Желательны указания на вспомогательные средства вычислений (таблицы, приборы, графики), какие в данном вычислении были использованы. Необходимой заключительной частью всякого вычисления является проверка, а также соображения о точности полученного результата, так как в подавляющем большинстве случаев результат вычисления даже при точных данных бывает только приближённым (этим вопросом будем ещё заниматься в дальнейшем). Если выполненное вычисление переписывается набело, рекомендуется проверять каждую его цифру, находя её с целью проверки заново и сравнивая с черновиком.

Вот пример записи решения задачи (для IX класса).

Задача. Найти длину x стороны квадрата, равновеликого треугольнику со сторонами $a=89$ *м*, $b=321$ *м*, $c=395$ *м*.

Решение графическое (в масштабе: в 1 клетке 20 *м*). Построив по трём данным сторонам $\triangle ABC$ (рис. 1), проводим $CD \perp AB$ и откладываем на продолжении AB отрезок $BE=0{,}5\ CD$,

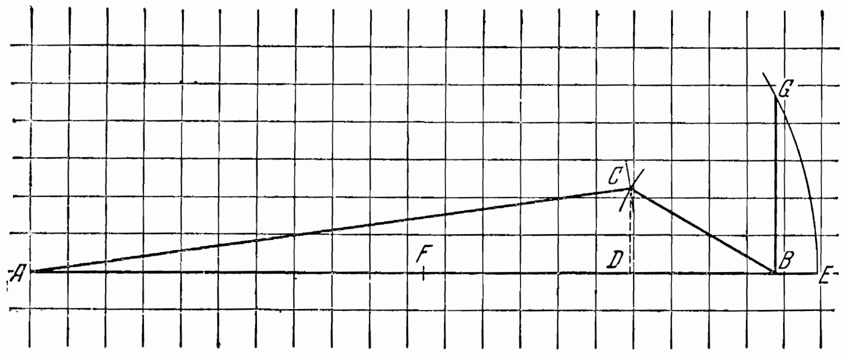

Рис. 1.

затем строим окружность на отрезке AE, как на диаметре. Полухорда BG, проведённая перпендикулярно к AE, представляет собой искомый отрезок. Его длина 4,8 клетки, а потому ответ $x \approx 96$ *м*. Цифра единиц здесь ненадёжна, так как вполне возможна ошибка при измерении BG в 0,1 клетки, т. е. в 2 *м*.

Решение вычислительное. Формулы:

$$s^2 = p(p-a)(p-b)(p-c);\ 2p = a+b+c;\ x = \sqrt{s}.$$

Вычисление по таблице четырёхзначных логарифмов.

a	89
b	321
c	395
$2p$	805
p	402,5
$p-a$	313,5
$p-b$	81,5
$p-c$	7,5
$(p-a)+(p-b)+(p-c)=$ $=3p-2p=p$	402,5 (контроль)

$\lg p$	2,6047
$\lg(p-a)$	2,4962
$\lg(p-b)$	1,9112
$\lg(p-c)$	0,8751
$\lg s^2=\lg x^4$	7,8872
$\lg x$	1,9718
x	93,72

Ответ $x \approx 93{,}72$.

Если данные — числа точные, то в ответе можно ручаться за первые три значащие цифры, четвёртая же ввиду использования четырёхзначных логарифмов не вполне надёжна.

Как видим, получилось удовлетворительное согласие между обоими решениями. Контрольное вычисление, проведённое посредством семизначных логарифмов, даёт $x \approx 93{,}71424$.

Вопросу о рационализации записи вычислений и вообще записи решений задач уделяется в школе мало внимания. Надо давать хорошо продуманные образцы записи, но отнюдь не требовать слепого подражания им, а мобилизовать учащихся на дальнейшее их улучшение.

§ 4. Вспомогательные средства вычисления

В настоящее время весьма широкое распространение получили разнообразные приборы и машины, автоматически или полуавтоматически выполняющие многие математические операции, начиная от сложения (и вычитания) многозначных чисел, с таким успехом выполняемого на всем известных русских (конторских) счётах, до решения самых сложных вычислительных задач гармонического анализа и интегрирования уравнений в частных производных, производимого сконструированными и построенными в СССР машинами, каждая из которых заменяет десятки квалифицированных вычислителей. Допустимо ли, чтобы школьная математика полностью игнорировала это полезнейшее дело механизации счётной работы? Даже в рамках семилетней школы вполне возможно использование трёх рассмотренных ниже простейших средств механизации вычислений (счёты, палочки Непера, арифмометр). Счётная логарифмическая линейка, сделавшаяся теперь необходимой принадлежностью каждого инженера и техника, должна войти в обиход учащихся IX и X классов. Желательно, чтобы сам учитель постоянно ею пользовался как в своей домашней работе, так и на глазах учащихся любого класса. Об этом приборе речь будет идти в § 17.

Счёты представляют собой прекрасное средство для производства действий сложения и вычитания многозначных чисел, с успехом конкурирующее, пока речь идёт об этих двух действиях, в отношении скорости работы с арифмометром наиболее распространённого типа. Дело в том, что на арифмометре надо при сложении и вычитании устанавливать последовательно каждое данное, а затем прибавлять или вычитать его вращением рукоятки, на счётах же особой установки требует только первое данное. Конечно, счёты не дают полной автоматизации: перенос десятков, т. е. замена каждых десяти косточек, накопившихся на одной спице, одной косточкой следующей спицы, как и аналогичная операция при вычитании, требует внимания вычислителя и является главным источником ошибок. Тем не менее счёты так экономят время, нужное для выполнения сложения и вычитания, и так просты по своему устройству и употреблению, что получили в нашей практике самое широкое применение. Уже окончившие начальную школу должны согласно действующей ныне программе владеть навыками работы на счётах. Средняя школа, к сожалению, счёты не использует. Желательно, чтобы навыки использовались и закреплялись в средней школе, тем более, что постоянное пользование счётами доставит заметную экономию времени, затрачиваемого на решение задач, особенно в V классе. Умножение, как последовательное сложение, и деление, как последовательное вычитание, тоже с успехом выполняются на счётах (с различными упрощениями в частных случаях; так, например, умножить 365 на 17 на счётах можно согласно записи $3\,650 + 3\,650 - 365 - 365 - 365$). Это, однако, представляет большие трудности; на первых порах следует ограничиться только сложением и вычитанием.

В той же неполной, но всё же значительной мере, в какой сложение и вычитание механизируются благодаря счётам, действия умножения и деления механизируются благодаря применению весьма простого, но мало распространённого прибора — палочек Непера. Это — набор полосок, изображённый на рис. 2, причём каждая полоска должна быть в нескольких экземплярах. Полоски имеют сверху цифры от 0 до 9, а ниже — произведения этого числа на все однозначные числа, причём в каждом произведении цифра десятков записывается несколько выше и левее цифры единиц, отделяясь от неё наклонной чертой. Желая умножить, например, число 37 214 на какое угодно другое натуральное число, укладываем рядом палочки с цифрами 3, 7, 2, 1, 4 в заголовках, как показано на рис. 3, и читаем на последовательных строках произведения данных чисел на 1, 2, $3, \ldots, 9$, причём необходимый перенос десятков делается в уме. Сначала эти произведения читаются справа налево. Например, произведение 37 214 на 7 содержит 8 единиц, $7 + 2 = 9$ десятков, $4 + 0 =$ $= 4$ сотни, $9 + 1 = 10$ тысяч, $1 + 1 + 4 = 6$ десятков тысяч, 2 сотни тысяч. Однако быстро приобретается навык в чтении произведений сразу слева направо. Таким образом, палочки Непера дают готовые произведения любого числа на все однозначные. Чтобы умножить многозначное на многозначное, надо выложить на палочках множимое, взять с них готовые частные произведения, надлежащим образом подписать их друг под другом и сложить их. Присоединяя к палочкам Непера счёты, мы ещё больше механизируем умножение: записывать приходится только окончательный результат.

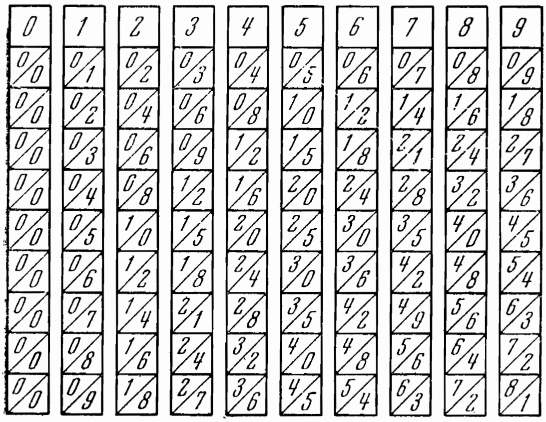

Рис. 2.

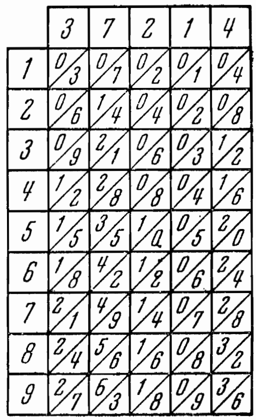

Рис. 3.

Несравненно дальше, чем при применении счётов и палочек Непера, идёт механизация арифметических действий при использовании арифмометра «Феликс», названного так в честь Ф. Э. Дзержинского и изготовляемого на советских заводах. Эта счётная машина изображена на рис. 4. Она представляет собой дальнейшее усовершенствование машины, которую в конце XIX в. построил петербургский инженер В. Т. Однер. Арифмометр получил у нас самое широкое распространение, имеется почти в каждом учреждении. Усвоение принципа устройства арифмометра и техники работы требует всего 15—20 минут, и крайне желательно, чтобы каждый оканчивающий среднюю школу умел на нём работать. В то время как применение палочек Непера ускоряет производство умножения и деления примерно вдвое, арифмометр даёт ускорение примерно в 10—12 раз (по сравнению с обычным письменным производством этих действий на бумаге). Вычисление, требующее без применения арифмометра целого часа работы, с его помощью выполняется в 5—6 минут, притом с несравненно меньшими шансами сделать ошибку.

Приводим заимствованное из книги автора [2а] описание устройства арифмометра «Феликс» и работы на нём.

Верхнюю часть машины образует установочный механизм. На рис. 4 видны концы 9 спиц, принадлежащих установочному механизму и способных перемещаться вдоль 9 прорезов. На левом краю каждого прореза имеются цифры от 0 до 9, идущие сверху вниз. Двигая рукой спицы, можно установить посредством них любое девятизначное число, целое или дробное десятичное, причём знаком дробности служит металлическая «запятая», которую можно устанавливать между верхними концами любых двух соседних прорезов. Направо от установочного механизма имеется рукоятка с ручкой. Чтобы повернуть рукоятку, надо сначала оттянуть ручку немного вправо, сделать, далее, тре-

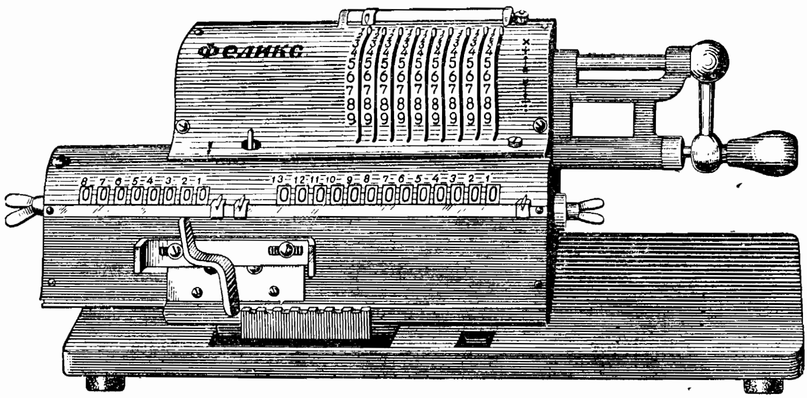

Рис. 4.

буемое число полных оборотов, а затем обязательно привести рукоятку в то «нормальное» положение, какое показано на рисунке. Ниже установочного механизма находится каретка, снабжённая двумя рядами окошек: справа видны 13 окошек, которые будем называть *ответными окошками*, так как в них появляются результаты действий сложения, вычитания и умножения, а слева — 8 окошек счётчика оборотов, которые будем называть *счётными окошками*. На левом и правом концах каретки видны две ласточки, вращение которых заменяет нулями («гасит») те цифры, какие появляются в счётных и ответных окошках. По планке под окошками скользят металлические запятые, а ниже планки находится приспособление (транспортёр), позволяющее передвигать каретку либо на величину одного только интервала между соседними прорезами установочного механизма, либо на несколько таких интервалов сразу.

Прежде чем вращать рукоятку, надо всегда убедиться, что обе ласточки каретки приведены в горизонтальное положение (достигая этого положения, ласточка щёлкает) и что средняя планка транспортёра находится против одного из промежутков между зубцами расположенной ниже гребёнки (транспортёр тоже должен щёлкнуть).

Если хотя бы одно из этих условий не соблюдено, рукоятка вращаться не будет, а попытка всё же повернуть её приведёт немедленно к поломке машины. На уровне нижних концов прорезов установочного механизма и несколько левее их видна кнопка, назначение которой — ускорять приведение спиц в нулевое положение: подвинув эту кнопку влево и одновременно осторожно вращая рукоятку к себе, мы после возвращения рукоятки к нормальному положению будем иметь все спицы на нулях. Надо только помнить, что после одной трети оборота рукоятки, когда все спицы будут «выравнены», кнопку надо отпускать. Правее крайнего правого прореза на кожухе машины видны две стрелки, направленные в противоположные стороны и снабжённые знаками действий (одна $+$ и $\times$, другая $-$ и $:$). Эти стрелки указывают направления, в каких надо вращать рукоятку при выполнении различных действий. Будем называть эти направления *положительным* (из нормального положения ручки к себе) и *отрицательным* (от себя).

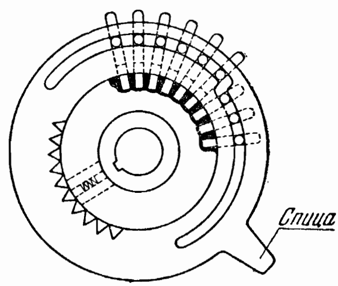

Рис. 5.

Мы рассмотрели все части машины, с которыми приходится иметь дело при вычислении. Внутреннего её устройства касаться не будем, укажем только, что основным её элементом является «зубчатка Однера», изображённая на рис. 5. Эта зубчатка имеет переменное число выступающих наружу зубцов, а именно столько, на сколько делений своего прореза опущена соответствующая спица. На рис. 5 зубчатка имеет шесть выступающих зубцов, остальные спрятаны. Двигая спицу, мы меняем число зубцов в той зубчатке, которая с этой спицей связана, от 0 до 9. Зубчаток Однера в арифмометре столько, сколько спиц.

Поставив в первом (крайнем правом) прорезе спицу на цифру 3 и сделав поворот рукоятки в положительном направлении, мы повернём на три зубца колесо, на ободе которого нанесены цифры, видные через первое (крайнее правое) ответное окошко. Если раньше в этом окошке была видна цифра 0, то теперь появится 3. Второй поворот рукоятки в том же направлении повернёт это колесо ещё на три зубца, и вместо цифры 3 мы увидим в ответном окошке уже цифру 6: мы выполнили сложение $3+3$ или, что то же, умножение $3 \cdot 2$. Новый поворот рукоятки даёт уже $6+3=9$ или $3 \cdot 3=9$. При четвёртом повороте рукоятки в первом ответном окошке пройдут последовательно цифры 9, 0, 1, 2 (колесо сделало полный оборот и начинает делать второй), а затем во втором ответном окошке (рядом) появится цифра 1. Здесь приходит в действие механизм переноса десятков, являющийся самой деликатной частью всякой счётной машины. В итоге получаем $9+3=12$ или $3 \cdot 4=12$.

Теперь нетрудно понять, как выполняются на рассматриваемой машине четыре основных действия. Чтобы сложить два числа, надо: 1) поставить нули в ответных окошках (вращая до щелчка правую ласточку), 2) установить на спицах первое слагаемое (последнюю его цифру обычно ставят посредством первой, т. е. крайней правой спицы, но это не обязательно), 3) перевести это слагаемое в ответные окошки (одним поворотом рукоятки к себе), 4) установить на спицах второе слагаемое, 5) сделать ещё один поворот рукоятки к себе; теперь в ответных окошках появится искомая сумма. Те же пять операций производятся и для выполнения вычитания, но после установки на спицах вычитаемого рукоятка вращается в обратном направлении. Понятно, что к полученному числу можно прибавить (или от него отнять) ещё сколько угодно чисел.

Умножение на однозначное число выполняется как повторное сложение: чтобы умножить, например, на 9, вращаем рукоятку 9 раз к себе. Для умножения на двузначное число, например 39, используется возможность перемещения каретки относительно верхней части машины, содержащей установочный механизм: переместив каретку посредством транспортёра на один интервал вправо, вращаем рукоятку три раза к себе и получаем в ответных окошках произведение взятого числа на 30. Теперь остаётся вернуть каретку в нормальное положение, когда первое ответное окошко находится под первым прорезом, и сделать ещё 9 оборотов рукоятки к себе. В ответных окошках получим искомое произведение на 39.

Умножение на 39 описанным способом требует $3+9=12$ оборотов рукоятки; это число уменьшится до 5, если при сдвинутой направо каретке сделать не 3, а 4 оборота, т. е. умножить на 40, а затем, вернув каретку в нормальное положение, сделать один оборот в обратную сторону (от себя). Этот приём употребляется на практике и позволяет никогда не вращать рукоятку более 5 раз подряд в одну сторону, так как умножение на 9, 8, 7, 6 заменяется умножением на 10 и вычитанием 1-, 2-, 3-, 4-кратного множимого.

Число сделанных оборотов рукоятки регистрируется в счётных окошках (слева). Выполняя умножение, надо предварительно привести к нулю все цифры счётных окошек вращением до щелчка левой ласточки. Таким образом, правило умножения можно формулировать так: установив множимое на спицах, комбинируй движение каретки и вращение рукоятки так, чтобы в счётных окошках получить множитель; тогда в ответных окошках получится произведение. Нужно только иметь в виду, что при вращении рукоятки в отрицательном направлении в счётных окошках появляются красные цифры и набирать в них делитель надо в особой форме. Так, при умножении на 39, как 40—1, в ответных окошках должно быть число $4\bar{1}$, где знаком $\bar{1}$ мы условно изображаем красную цифру 1. При умножении на число 8376 в счётных окошках должно быть число $1\bar{2}\,4\bar{2}\bar{4}$, где $\bar{2}$

и $\bar{4}$ опять условно обозначают красные цифры. Пользуясь красными цифрами, мы в этом случае должны будем повернуть рукоятку $1+2+4+2+4=13$ раз, тогда как без них понадобилось бы $8+3+7+6=24$ оборота.

Выполняя на арифмометре умножение как повторное сложение, можно выполнить на нём деление как повторное вычитание. Разделить, например, 17 на 3 — значит узнать, сколько раз можно отнимать от 17 число 3 (до получения остатка, меньшего делителя). Поэтому делимое устанавливают в ответных окошках, делитель — на спицах, и начинают вычитать. Частное как число сделанных оборотов получается в счётных окошках. При делении многозначных чисел, как и при умножении, для уменьшения числа оборотов рукоятки используется движение каретки. Пусть, например, требуется разделить 243 558 на 913. Устанавливаем делимое в крайних левых ответных окошках; в остальных ответных окошках, как и во всех счётных окошках, должны быть нули. Отделяя посредством металлической запятой первые три цифры делимого (по числу цифр делителя), мы замечаем, что получилось число 243, меньшее делителя; поэтому берём ещё одну цифру, т. е. отделяем число 2435. Сдвинув каретку до отказа вправо, устанавливаем делитель 913 на спицах так, чтобы его можно было отнимать от 2435 (цифра 9 должна быть над цифрой 4), и делаем вычитание столько раз, сколько возможно, т. е. пока не получим в остатке числа, меньшего делителя. Получив после двух оборотов рукоятки в остатке число 609, смещаем каретку на одно место влево, а запятую — на одно место вправо и повторяем операцию. После 6 оборотов рукоятки получаем остаток 617. Смещая каретку ещё на одно место влево, а запятую вправо, вновь делаем последовательное вычитание, пока не получим после шести оборотов остатка 700. Деление в целых числах окончено: частное 266 получено в счётных окошках, остаток 700 — в ответных окошках. Продолжая те же операции, мы получим десятые, сотые и т. д. доли частного.

Выполняя деление, можно не следить за последовательно получаемыми остатками, а крутить рукоятку до звонка, который машина даёт при первом лишнем обороте, и затем сделать один оборот к себе, уничтожая сделанный лишний оборот от себя.

Рассмотрим ещё извлечение квадратного корня.

Наиболее употребительный способ извлечения квадратного корня посредством арифмометра основан на легко проверяемом тождестве

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-3)+(2n-1)=n^2,$$

говорящем, что сумма n первых последовательных нечётных натуральных чисел равна квадрату этого числа. Поэтому, чтобы извлечь из какого-нибудь натурального числа квадратный корень, надо вычитать из него последовательно числа 1, 3, 5, 7, ... до тех пор пока не получим в остатке число, меньшее очередного вычитаемого. Число сделанных вычитаний и будет искомым квадратным корнем (точнее квадратным корнем из наибольшего точного квадрата, заключающегося в данном числе). Надлежащее перемещение каретки арифмометра и здесь позволяет во много раз уменьшить необходимое число вычитаний. Рассмотрим детали этого способа на примере.

Пусть требуется найти $\sqrt{5\,234\,096}$. Установив подкоренное число, как делимое при делении, в крайних левых ответных окошках (в остальных — нули) и погасив имеющиеся цифры в счётных окошках, смещаем каретку до отказа вправо и отделяем запятой старшую грань подкоренного числа (цифру 5). Начинаем вычитать из 5 нечётные числа и останавливаемся после двух вычитаний: $5-1-3=1$, — дальше вычитать нельзя. Смещаем затем каретку на одно место влево, а запятую в подкоренном числе — на два места вправо. Последнее вычитаемое (3) увеличиваем на 1 и ближайшую справа спицу ставим на 1. Продолжаем вычитать нечётные числа, начиная с 41. После двух оборотов останавливаемся, так как получается число $123-41-43=39$, из которого следующее нечётное число 45 вычитать уже нельзя. Опять смещаем каретку на одно место влево, а запятую на два места вправо; увеличиваем на 1 последнее вычитаемое 43 и рядом с ним ставим 1. Вычитаем, далее, нечётные числа, начиная с 441 и кончая 455 (восемь вычитаний). Смещаем каретку ещё на одно место влево, а запятую на два места вправо (теперь запятая оказывается после последней цифры остатка 36 696) и вычитаем последовательно числа 4561, 4563, ..., 4573. Теперь в ответных окошках мы имеем окончательный остаток 3727, а в счётных окошках — искомый корень 2287. Для проверки находим

$$2287^2+3727=5\,234\,096$$

и убеждаемся, что всё правильно, так как

$$2288^2=(2287+1)^2=2287^2+2\cdot2287+1=2287^2+4575$$

больше данного подкоренного числа.

Из других счётных машин, предназначенных, как и арифмометр «Феликс», для выполнения основных арифметических действий, отметим арифмометр с непрерывным движением, изобретённый и построенный знаменитым русским математиком П. Л. Чебышевым в 1882 г. При вращении каждого счётного колеса этой машины счётное колесо следующего высшего разряда вращается со скоростью, в 10 раз меньшей; передача десятков с одного разряда на другой совершается непрерывно; механизм для выполнения этой передачи проще, чем в машине, изобретённой Однером. Описание арифмометра Чебышева имеется в IV томе Полного собрания его сочинений[1]).

---

[1]) П. Л. Чебышев, Полное собрание сочинений, т. IV, Теория механизмов, Издательство АН СССР, 1948.

Существует ряд других машин, выполняющих четыре арифметических действия и носящих в отличие от других счётных машин общее название «вычислительных машин». Они различаются большей или меньшей степенью автоматизации работы с разными дополнительными устройствами: печатающими ответы, контролирующими правильность установки, дающими общий итог («наростающий итог») производимых суммирований и др. В СССР уже давно работает ряд заводов, выпускающих такие вычислительные машины, в то время как в дореволюционной России они вовсе не производились. Особое распространение получила клавишная счётная машина (сокращённо КСМ), изображённая на рис. 6. Вращение счётных колёс производится в ней не вручную, как в арифмометре «Феликс», а электрическим мотором, видным на рисунке слева; маленькая рукоятка предназначена только для гашения счётчиков. Машина начинает работать на сложение и умножение после нажатия клавиши со знаком плюс, на вычитание и деление — со знаком минус. Благодаря работе мотора КСМ даёт результаты значительно скорее, чем арифмометры, работающие вращением рукоятки от руки, и меньше утомляет вычислителя.

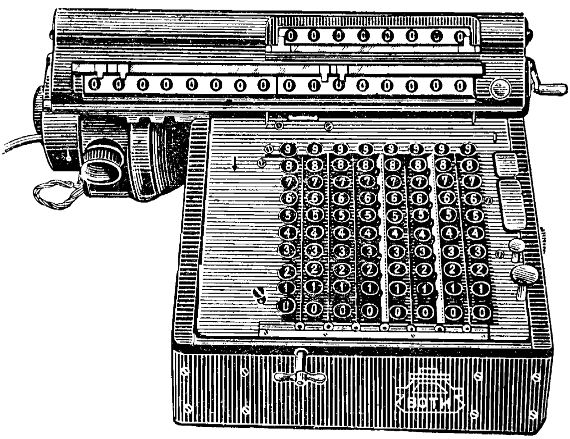

Рис. 6.

Вычислительные задачи, выдвигаемые различными науками и разными отраслями техники, особенно астрономией, оптикой, статистикой, оборонной техникой, привели к созданию многих типов счётных машин, несравненно более сложных и более совершенных, чем описанные выше вычислительные машины. Спроектировать и построить особую машину выгодно всякий раз, когда на практике такая задача многократно повторяется при различных исходных данных, особенно тогда, когда большое значение имеет, как это бывает, например, в задачах артиллерии, быстрота решения. Нередко такая машина представляет собой комбинацию нескольких более простых машин, каждая из которых выполняет одну определённую операцию и передаёт полученные результаты следующей машине, причём всё совершается автоматически. Таким образом насущные задачи науки и техники привели к созданию новой отрасли точного машиностроения — к конструированию и производству различных «счётно-решающих устройств».

«В основе всякого счётно-решающего устройства, — пишут Н. Е. Кобринский и Л. А. Люстерник [1]), — лежит моделирование некоторой математической зависимости, создание такого физического процесса, который изображает эту зависимость. Операция сложения чисел, например, моделируется сложением угловых или линейных перемещений, сложением токов, сходящихся в узле электрической цепи, и т. д. Операции умножения можно моделировать изображением множителей в виде углового перемещения и длины плеча рычага, а произведения — линейным перемещением его конца; или множители изображают напряжение и проводимость, а их произведение на основе закона Ома — силу тока и т. д. ... Одна и та же математическая зависимость описывает разные физические процессы, и каждый из них может моделировать её. Естественно остановиться на том, который легче задать и состояние которого легче измерить... Интересно отметить, что в своё время строились механические модели для расчёта электрических цепей. Сейчас, с развитием измерительной электрической техники, построены электрические приборы, моделирующие механические системы».

Во многих случаях важно найти площадь плоской фигуры, ограниченной произвольным контуром. Геодезист делает это на плане, инженер-энергетик — на индикаторной диаграмме, показывающей зависимость давления в цилиндре паровой машины или двигателя внутреннего сгорания от положения поршня; на кожевенных заводах учитывают продукцию обмером площади каждой выделанной кожи. Для упрощения и ускорения решения этой задачи построено много специальных приборов, известных под названием «планиметров» и представляющих собой счётно-решающие устройства непрерывного действия. Работают они автоматически, позволяя отсчитать искомый результат непосредственно после того, как обводный штифт прибора обойдёт весь данный контур по чертежу, или после того, как обмеряемый контур (например, контур выделанной кожи) будет пропущен между валками прибора.

Всевозможные задачи на дискретные (не непрерывные) величины, сводящиеся в конечном итоге к задачам на натуральные числа, решаются автоматически с помощью машин другого типа, а именно с помощью так называемых счётно-аналитических машин (сокращённо САМ). В их проектировании, производстве и использовании у нас за последние годы сделано особенно много: имеется завод САМ, их выпускающий, имеются «счётные фабрики» и «счётные станции», их использующие.

Рассмотрим два примера применения счётно-аналитических машин.

---

[1]) Н. А. Кобринский и Л. А. Люстерник, Математическая техника, Успехи математических наук, т. I, вып. 5—6 (15—16) (Новая серия), 1946.

Положим, имеется материал, собранный при переписи населения, в виде огромного числа карточек, содержащих данные о каждом переписанном лице, а именно данные о его поле, возрасте, национальности, образовании, профессии и т. д. Материал этот надо обработать, т. е. установить, сколько в отдельности мужчин и женщин, сколько человек в каждой возрастной группе и пр. Ручная раскладка карточек и подсчёт их по группам в силу их многочисленности требует непомерно большой затраты времени и даёт результаты, далеко не свободные от случайных ошибок. Естественно, что построены машины, производящие эти подсчёты автоматически с весьма большой скоростью. Все данные, полученные в результате переписи для каждого человека, переносятся на особую «перфорационную карту» (перфокарту), на которой каждому признаку соответствует одно сквозное отверстие (или группа отверстий). Эти перфокарты пропускаются с огромной скоростью через счётно-аналитическую машину, работающую от мотора и безошибочно подсчитывающую, сколько прошло карточек, имеющих отверстия на некотором определённом месте, т. е. сколько человек, имеющих некоторый определённый признак, зарегистрировано переписью.

В качестве второго примера возьмём «таблицу разностей», составляемую часто при решении различных задач, в которых данными являются значения некоторой функции. Ниже приведена такая таблица разностей первого, второго и третьего порядков для функции $f(x) = 10^4\sqrt{x}$, заданной таблицей значений, округлённых до целых и соответствующих значениям аргумента x от 10 до 20 через 1.

x	$f(x) = 10^4\sqrt{x}$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
10	31 623			
		1543		
11	33 166		—68	
		1475		8
12	34 641		—60	
		1415		6
13	36 056		—54	
		1361		6
14	37 417		—48	
		1313		5
15	38 730		—43	
		1270		4
16	40 000		—39	
		1231		3
17	41 231		—36	
		1195		4
18	42 426		—32	
		1163		1
19	43 589		—31	
		1132		
20	44 721			

Числа, записанные в столбце $\Delta f(x)$ и называемые «первыми разностями» или «разностями первого порядка», представляют собой разности двух соседних значений функций (из последующего вычитается предыдущее). Так, $33166 - 31\,623 = 1543$; $34\,641 - 33\,166 = 1475$ и т. д. Поступая точно так же со столбцом первых разностей, получим столбец вторых разностей, потом третьих, четвёртых и т. д. Нередко составление таблицы разностей приходится вести до разностей V, VI, VII и более высокого порядка. Это — работа, весьма простая по принципиальной своей стороне, но очень трудоёмкая и нуждающаяся в тщательной проверке каждого шага.

Несколько лет назад советский специалист по счётно-решающим устройствам И. Н. Янжул приспособил одну из счётно-аналитических машин, а именно так называемый «табулятор», к автоматическому выполнению этой операции составления разностной схемы. Для каждого значения данной функции изготовляется перфокарта; все перфокарты закладываются в машину, которая работает автоматически и печатает таблицу разностей. Если учесть все вспомогательные операции, связанные с работой автомата, то окажется, что этот способ даёт около 2000 значений разностей в час, причём каждая разность может иметь до 7 цифр. Это в 3—4 раза превосходит рекордную скорость такой работы, достигнутую за рубежом.

Разные счётно-аналитические машины (табуляторы, мультиплейеры и другие) позволяют очень быстро и очень точно составлять всевозможные таблицы. Данные задаются на перфокартах, машина работает автоматически от мотора и выбрасывает готовую таблицу в печатном виде.

Об истории счётно-аналитических машин и успехах, достигнутых в СССР в деле их проектирования, производства и использования, можно прочесть в статьях, напечатанных в журнале «Успехи математических наук» за 1946 и 1947 гг. Обширная библиография по вопросу механизации вычислений вообще дана в русском переводе книги Виллерс, Математические инструменты, вышедшей в 1949 г.

Отметим ещё специальную машину для решения системы уравнений первой степени. Решение любой такой системы не требует ничего, кроме четырёх арифметических действий над данными коэффициентами; принципиальная сторона всей работы доступна ученику VII класса, но когда неизвестных и уравнений много (бывают практические задачи, требующие решения систем с несколькими десятками неизвестных) и когда коэффициенты — числа многозначные, то решение систем становится делом, требующим многих месяцев напряжённой работы. Построено много машин, выполняющих эту работу несравненно быстрее, чем ручным способом. Отметим машину, построенную в 1940 г. советским изобретателем В. М. Прошко [1]). Она

---

[1]) В. М. Прошко, Приборы для определения корней системы линейных уравнений, Успехи математических наук, т. I, вып. 5—6 (15—16) (Новая серия), 1946.

позволяет автоматически решать систему из 10 уравнений первой степени с десятью неизвестными и с трёхзначными коэффициентами.

Работа по дальнейшему усовершенствованию существующих счётных машин, по созданию новых их типов ведётся у нас с успехом в ряде научных центров, из которых на первое место надо поставить Отдел приближённых вычислений Математического института Академии наук СССР. С этой работой можно детально ознакомиться по статье К. А. Семендяева в сборнике «Математика в СССР за тридцать лет», выпущенном Государственным издательством технико-теоретической литературы в 1948 г.

§ 5. Приближённые значения

Желая найти из опыта значение какой-либо неизвестной величины x, мы обращаемся к счёту или измерению, но получаем, как уже отмечалось выше, точное значение x лишь в исключительно редких простейших случаях и вынуждены довольствоваться его приближённым значением a: вместо точного равенства $x=a$ получаем равенство приближённое $x \approx a$. Школьная математика склонна игнорировать этот приближённый характер большинства чисел, с которыми мы имеем дело на практике, но не может обойти то обстоятельство, что уже в пятом классе при изучении десятичных дробей встречается деление, приводящее к бесконечным десятичным дробям, которые по необходимости приходится округлять, чтобы использовать их на практике или сделать возможными дальнейшие операции над ними. Таким образом, уже при изучении рациональных чисел школьная математика встречается с необходимостью рассматривать приближённые значения. В дальнейшем появляются различные иррациональные числа — корни, логарифмы, антилогарифмы, число π, значения тригонометрических и обратных круговых функций и т. д., и отсутствие в школьных программах специального раздела, посвящённого приближённым вычислениям, является серьёзным дефектом этих программ, весьма неблагоприятно сказывающимся на математической культуре молодёжи, оканчивающей среднюю школу.

Вот типичный случай из практики лаборатории физики. Требуется найти, по возможности точнее, среднюю плотность δ материала, из которого сделан кусок проволоки. Имея в своём распоряжении мерку Пальмера («толщемер»), миллиметровую линейку и лабораторные весы, устанавливаем, что диаметр проволоки равен $2r \approx 0{,}48$ *мм*, её длина $h \approx 264{,}4$ *мм*, её вес $p \approx 0{,}423$ *г*. Остаётся провести вычисление по формулам $\delta = \frac{p}{v}$, $v = \pi r^2 h$, где p должно быть выражено в граммах, r и h — в сантиметрах.

При вычислении встречаем ряд затруднений. Во-первых, с какой точностью взять π? Желая согласно заданию найти δ с наибольшей возможной точностью, берём более точное значение 3,14159, приводимое обычно в учебниках, хотя остаётся сомнение, не лучше ли взять ещё больше знаков. Далее, находим:

$$r \approx 0{,}24 \text{ мм}, \quad r^2 \approx 0{,}0576 \text{ мм}^2, \quad \pi r^2 \approx 0{,}180955584 \text{ мм}^2,$$

$$v = 47{,}8246564096 \text{ мм}^3 = 0{,}0478246564096 \text{ см}^3.$$

Возникает второе затруднение: у получаемых чисел много десятичных знаков; не округлить ли их? Никаких указаний о том, какое округление в данном случае допустимо, обычный школьный курс математики не даёт, поэтому никакого округления из осторожности не делаем. Теперь при делении $p \approx 0{,}423$ *г* на найденное значение v мы встречаемся с третьим затруднением: сколько цифр взять в частном, которое выражается бесконечной десятичной дробью? Деление можно продолжать без конца, но ясно, что при взятых нами приближённых значениях r, h, p искомое значение δ можно получить тоже только приближённо. Здесь необходимо остановиться после получения какого-то числа десятичных знаков частного; игнорировать приближённый характер данных уже нельзя, но отсутствие определённых оснований для определения этого числа десятичных знаков создаёт тягостное состояние неуверенности, совершенно не вяжущееся с убеждением, что мы занимаемся применением точной науки — математики. Остановившись, например, после получения цифры сотых и замечая, что остаток от деления составляет больше половины частного, получаем, округляя частное до сотых по избытку, что $\delta \approx 8{,}84$, но не имеем никаких оснований утверждать ни того, что все цифры этого числа точны, ни того, что отброшенные нами цифры (тысячные и дальше) действительно не заслуживают доверия.

Весьма простые, вполне доступные уже пятиклассникам правила округления результатов действий над приближёнными значениями («правила подсчёта цифр») полностью устраняют все затруднения при вычислениях, аналогичные трём указанным, и значительно упрощают выкладки. О них будет итти речь ниже, в §§ 10—13. Применяя эти правила к решению только что рассмотренной задачи, мы придём к заключению, что $\delta \approx 8{,}8$ с уверенностью, что в цифре десятых сколько-нибудь значительная ошибка весьма мало вероятна, а отброшенные цифры (сотых, тысячных и т. д.) никакого доверия не заслуживают. Применяя несколько более громоздкий, но по идейной своей стороне более простой, вполне доступный учащимся семилетней школы «способ границ», мы устанавливаем, что, считая $0{,}475 < 2r < 0{,}485$ *мм*, $264{,}3 < h < 264{,}5$ *мм*, $0{,}422 < p < 0{,}424$ *г*, можно с абсолютной уверенностью утверждать, что искомая плотность δ заключается между 8,63 и 9,05, а потому $\delta \approx 8{,}8$ ($\pm 0{,}25$), т. е., что приближённое значение δ равно 8,8 и отличается от точного его значения во всяком случае меньше чем на 0,25 (выкладки проведены на стр. 390).

Из обычного курса арифметики учащиеся выносят умение округлять десятичные дроби до определённого разряда или, что то же, до определённого десятичного знака. Эта операция рассматривается в связи с действием деления[1]), но имеет значение и независимо от него. Округление данного десятичного числа, целого или дробного, до некоторого его разряда состоит в отбрасывании всех его цифр, находящихся правее цифры этого разряда. Если первая из отброшенных цифр есть 0, 1, 2, 3, 4, то полученное округлённое значение меньше данного, округление делается «по недостатку»; если же эта цифра есть 5, 6, 7, 8, 9, то последняя сохраняемая цифра усиливается (увеличивается на 1), округление делается «по избытку». В обоих случаях абсолютное значение разности между данным и округлённым числами («погрешность округления») не достигает половины единицы того разряда, до которого произведено округление; исключением является тот случай, когда округление состоит в отбрасывании одной лишь цифры 5, когда эта разность составляет ровно половину единицы последнего сохранённого разряда; тогда нередко применяется «правило чётной цифры»: округление делается по недостатку, если последняя сохраняемая цифра чётная, и по избытку, если она нечётная. Так, округление числа 345,0715 до сотен, десятков, единиц, десятых, сотых, тысячных даёт соответственно 300; 350; 345; 345,1; 345,07; 345,072; округление до тысячных числа 345,0725 даёт тоже 345,072.

Чтобы не возвращаться в дальнейшем к вопросу об округлении, заметим, что наряду с округлением до определённого разряда или, что то же, до определённого десятичного знака, применяется округление до определённого числа «значащих цифр». *Значащими цифрами* числа называются все его цифры, кроме нулей слева и тех нулей справа, которые заменяют отброшенные или неизвестные цифры. Так в числе 3,14 — два десятичных знака, но три значащие цифры. Округление числа 345,0715 до одной, двух, трёх, четырёх, пяти, шести значащих цифр даёт те же самые числа, что указаны выше. Округляя число 7893 до одной, двух, трёх значащих цифр, получаем соответственно 8000, 7900, 7890, где нули справа поставлены взамен неизвестных цифр и не являются значащими цифрами (лучше было бы писать 8???, 79??, 789?); число 37,0, выражающее, например, температуру, определённую с помощью медицинского термометра (со шкалой, разделённой на десятые доли градуса), имеет три значащие цифры; здесь цифра нуль справа является значащей.

Есть основания не считать значащей цифрой единицу, если она является цифрой старшего разряда приближённого числа, т. е. первой слева его цифрой (об этом будет речь на стр. 382). Принимая это правило, мы должны, например, число 12,47 считать имеющим не 4, а только 3 значащие цифры.

---

[1]) См. А. П. Киселёв, Арифметика, 1946, § 169 и 170.

§ 6. Различные способы оценки точности приближённых значений

Имея дело с приближёнными равенствами вида $x \approx a$, мы должны, прежде всего, выяснить точный их смысл. Что, в самом деле, означает выражение «икс приближённо равен такому-то числу»?

Приближённое равенство $x \approx a$ получает совершенно определённый смысл, если оно сопровождается указанием *границы абсолютной погрешности*, т. е. такого числа $\Delta a > 0$, прибавление которого даёт число $a + \Delta a$, заведомо большее истинного (неизвестного нам) значения x, или так называемую *высшую границу* x (ВГ x), а вычитание — число $a - \Delta a$, заведомо меньшее x, или так называемую *низшую границу* x (НГ x). Так, например, равенство $x \approx 27{,}4\ (\pm 0{,}1)$ *кг* означает, что $27{,}4 - 0{,}1 = 27{,}3$ *кг* меньше x, а $27{,}4 + 0{,}1 = 27{,}5$ *кг* больше x. Общепринятая запись $x \approx a\,(\pm \Delta a)$ равносильна, таким образом, двойному неравенству $a - \Delta a < x < a + \Delta a$. Обратно, зная НГ x и ВГ x, т. е. имея двойное неравенство вида $p < x < q$, легко находим приближённое значение $a = \frac{q+p}{2}$ и границу абсолютной погрешности $\Delta a = \frac{q-p}{2}$. Приближённое равенство $x \approx a\,(\pm \Delta a)$ означает следующее: «икс приближённо равен a с границей абсолютной погрешности, равной Δa» или «икс приближённо равен a, отличаясь от a в ту или другую сторону меньше чем на Δa».

В некоторых случаях строгое неравенство $a - \Delta a < x < a + \Delta a$ заменяется неравенством более общего вида $a - \Delta a \leqslant x \leqslant a + \Delta a$.

Согласно твёрдо установившейся со времён Гаусса традиции все приближённые числа, приводимые в математических таблицах, имеют границы абсолютной погрешности, равные половине единицы последнего имеющегося в них разряда. Например, найдя в таблице логарифмов $\lg 7 \approx 0{,}8451$, мы можем быть уверены, что истинное значение $\lg 7$ отличается от $0{,}8451$ меньше чем на $0{,}0001 : 2 = 0{,}00005$, и что, следовательно, $0{,}84505 < \lg 7 < 0{,}84515$. Точно так же, найдя в таблице $\operatorname{tg} 89°59' \approx 3438$, мы можем быть уверены, что $3437{,}5 < \operatorname{tg} 89°59' < 3438{,}5$.

Возможно и употребительно другое определение границы абсолютной погрешности, совершенно равносильное указанному выше. Полагая $x = a + \xi$, называют число $\xi = x - a$ (оно неизвестно, если неизвестно x) *абсолютной погрешностью* или просто *погрешностью* приближённого числа a, а *границей* абсолютной погрешности этого приближённого числа называют любое число $\Delta a > 0$, удовлетворяющее неравенству $|\xi| < \Delta a$ или $|x - a| < \Delta a$ или, что то же, двойному неравенству $-\Delta a < x - a < \Delta a$. Прибавляя a ко всем трём частям этого последнего неравенства, получим неравенство $a - \Delta a < x < a + \Delta a$, которым пользовались для первого определения границы абсолютной погрешности. Возможность обратного перехода от этого последнего неравенства к неравенству $|x-a|<\Delta a$ показывает полную равносильность этих двух определений.

Указание границы абсолютной погрешности позволяет сравнивать точность различных приближений одного и того же неизвестного значения: чем меньше Δa, тем точнее приближённое значение a. Если, например, один раз найдено, что $x\approx 5{,}64\,(\pm 0{,}01)$, а другой раз, что $x\approx 5{,}63183\,(\pm 0{,}00002)$, то можно сказать, что второе приближение точнее первого в $0{,}01:0{,}00002=500$ раз. Но для сравнения точности приближений к различным числам указание их границы абсолютной погрешности само по себе уже недостаточно. Пусть, например, известно, что два измерения длины выполнены с одной и той же границей абсолютной погрешности, равной 1 *мм*, причём в одном случае измерялся диаметр проволоки, оказавшийся приближённо равным 2 *мм*, а в другом — геодезический базис, близкий к 1 *км*. Ясно, что первое измерение сделано очень грубо, граница абсолютной погрешности составляет целых 50% приближённого значения, второе же весьма точно, так как граница абсолютной погрешности составляет только $0{,}0001\%$ полученного числа. Таким образом, приходим к понятию *границы относительной погрешности*, определяемой как отношение границы абсолютной погрешности к приближённому значению, т. е. $\frac{\Delta a}{a}$ (или к неизвестному точному значению, т. е. $\frac{\Delta a}{x}$, что практически сводится к тому же), и выражаемой обычно в процентах. Указание границы относительной погрешности весьма распространено на практике. Так различные радиодетали (сопротивления, конденсаторы, катушки самоиндукции и др.) обычно имеют надписи вроде такой: «200 *ом* $\pm 10\%$», означающей, что данное сопротивление отличается от 200 *ом* не более чем на 10% этой величины, т. е. на 20 *ом*, и содержится в границах от 180 до 220 *ом*.

Отметим, что граница относительной погрешности приближённого числа не меняется при переходе к другой единице измерения, в частности, остаётся неизменной при переносе знака дробности, так как при этом в одно и то же число раз увеличивается или уменьшается и a и Δa.

Указание границы абсолютной или относительной погрешности представляет собой два основных способа характеристики точности приближённых чисел.

На практике оба эти способа применяются сравнительно редко. Несравненно чаще точность приближённого числа характеризуется простым указанием на число его цифр, заслуживающих доверия. Если граница абсолютной погрешности приближённого числа равна полуединице разряда последней его цифры, говорят, что все цифры этого числа точны. Таким образом, приближённое число, все цифры которого точны, представляет собой результат округления до некоторого разряда соответствующего истинного неизвестного нам числа; таковы все числа, приводимые в математических таблицах. Указывая число значащих цифр такого приближённого числа, тем самым характеризуют его точность. Двузначным, трёхзначным, вообще k-значным приближённым числом следует считать в соответствии с этим приближённое число, имеющее 2, 3, вообще k точных значащих цифр. Этот способ характеристики точности приближённых чисел имеет то достоинство, что не требует никаких дополнительных указаний: запись числа говорит сама за себя.

Указание числа точных цифр и места знака дробности равносильно указанию границы абсолютной погрешности; так, четырёхзначные квадратные корни из чисел от 1 до 100, в которых знак дробности стоит после первой значащей цифры, имеют границу абсолютной погрешности, равную 0,0005. Вместе с тем возможно и некоторое заключение о границе относительной погрешности, хотя и менее определённое, чем о границе абсолютной погрешности, но тем не менее весьма существенное для обоснования некоторых практических правил. Действительно, пусть дано k-значное приближённое число, все цифры которого точны, и пусть знак дробности поставлен после последней его цифры (как мы уже знаем, перенос запятой относительной погрешности не меняет). Это число a удовлетворяет неравенству $10^{k-1} < a < 10^k$, причём $\Delta a = 0{,}5$, а потому граница относительной погрешности заключена межу $0{,}5 \cdot 10^{-k}$ и $0{,}5 \cdot 10^{-(k-1)}$. Выражая её в процентах, получаем следующую таблицу:

k	2	3	4	5	6
$\frac{\Delta a}{a}$	от 0,5 до 5%	от 0,05 до 0,5%	от 0,005 до 0,05%	от 0,0005 до 0,005%	от 0,00005 до 0,0005%

Если не считать значащей цифрой единицу, когда она является цифрой старшего разряда приближённого числа, то границы значений $\frac{\Delta a}{a}$ в этой таблице уменьшаются вдвое, так как при соблюдении этого условия имеем неравенство $2 \cdot 10^{k-1} < a < 2 \cdot 10^k$.

Нередко даётся несколько иное, чем выше, определение понятия «точные цифры». Так, в статье П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова [6] читаем: «говорят, что какая-либо цифра данного приближённого значения числа точная, если погрешность не превосходит по абсолютной величине единицы соответствующего разряда». На практике на каждом шагу встречаются приближённые числа, в которых погрешность (абсолютная) может быть ещё больше; так, уже сложение четырёх слагаемых, каждое из которых имеет погрешность не более половины сотой, приводит к сумме, погрешность которой может быть близкой к двум сотым. Если вероятность больших значений погрешности в последней цифре приближённого числа много меньше, чем малых её значений, то эту цифру всё же сохраняют, как заслуживающую в известной мере доверия, хотя и без гарантии, что она точная. В дальнейшем мы будем иметь много примеров таких чисел.

Итак, мы ознакомились с тремя способами характеристики точности приближённых чисел: посредством указания границ их абсолютных погрешностей, посредством указания границ их относительных погрешностей, посредством указания числа их цифр, заслуживающих доверия. Именно этот последний способ и употребляется чаще всего на практике. В дальнейшем мы встретимся ещё с двумя способами, имеющими большое теоретическое значение, но вовсе неприменяемыми в средней школе, а именно, характеристикой точности приближённого числа через указание средней квадратической его погрешности и с указанием вероятности различных значений его погрешности.

§ 7. Обработка результатов измерений

В простейших случаях, с какими чаще всего и приходится иметь дело в школе, измерение даёт приближённый результат, точность которого легко характеризуется указанием его границы абсолютной погрешности. Так, измеряя миллиметровой линейкой длину x карандаша и замечая, что она заключается между 178 и 179 *мм*, ближе к 179, заключаем, что $x \approx 179\,(\pm 0{,}5)$ *мм* или, стремясь уменьшить границу абсолютной погрешности, что $x \approx 178{,}75\,(\pm 0{,}25)$ *мм*. При всяком взвешивании легко устанавливают, при какой наибольшей нагрузке чашки с гирями перетягивает чашка с грузом и какая минимальная добавка гирь вызывает перевес чашки с гирями. Если, например, мы пользуемся разновесом до 0,1 *г* и замечаем, что при нагрузке в 67,6 *г* перетягивает груз, а при нагрузке в 67,7 *г* перетягивают гири, то тем самым определяются низшая и высшая границы искомого веса, а отсюда и приближённое его значение, равное $(67{,}6 + 67{,}7) : 2 = 67{,}65$ *г*, и граница абсолютной его погрешности, равная $(67{,}7 - 67{,}6) : 2 = 0{,}05$ *г*.

Стремясь обеспечить наибольшую возможную в данных условиях точность измерения, делят на-глаз на 5 или 10 равных частей то наименьшее деление, какое имеется на шкале применяемого измерительного прибора, и находят лишний десятичный знак искомого значения посредством глазомерной оценки. При этом каждое повторное измерение даёт обычно результат, уже несколько отличный от предшествующего: сказываются и ошибки этой глазомерной оценки, и неточность установки (например, нулевая точка масштабной линейки при каждом новом её прикладывании может оказаться сдвинутой на небольшую долю миллиметров относительно начальной точки измеряемого отрезка), и неполная определённость самого измеряемого объекта; так, при измерении длины отрезка его концы обычно отмечаются тонкими поперечными штрихами, имеющими толщину примерно в 0,1 *мм*, и приходится на-глаз искать их середины. Это колебание результата измерения в более сложных случаях весьма усиливается. Так бывает, например, если на местности измеряется длинный отрезок, в котором применяемый измеритель (20-метровая лента) укладывается несколько раз, или если хотят найти средний вес сотни зёрен пшеницы, взятых наудачу из некоторой её партии.

Получив в результате повторных измерений несколько более или менее близких друг к другу приближённых значений $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ одной и той же неизвестной величины x, мы должны произвести обработку этих результатов с целью получения, во-первых, наиболее близкого к x значения a и, во-вторых, характеристики точности приближённого равенства $x \approx a$.

Нередко бывает, что все полученные измерением значения имеют некоторую систематическую погрешность, обусловленную постоянно действующей причиной. Так, пользуясь миллиметровой линейкой, деления которой несколько короче нормальных, мы постоянно будем получать преувеличенные результаты, а взвешивая деревянный предмет с помощью латунного разновеса, получим значения, меньшие истинного из-за потери в весе от вытесненного воздуха (закон Архимеда в газах). Такого рода погрешности должны быть учтены и устранены введением надлежащих поправок. Так, установив, что 100 делений нашей масштабной линейки равны не 100 *мм*, а лишь 98,5 *мм*, мы должны полученные в делениях нашего масштаба результаты умножить на 0,985, чтобы выразить эти результаты в миллиметрах.

После устранения таких систематических погрешностей остаются погрешности случайные, вызывающие расхождение результатов отдельных измерений. Если все значения $a_1, a_2, \ldots, a_n$ получены при одних и тех же условиях и заслуживают одинакового доверия, в качестве вероятнейшего значения искомой величины x берут их среднее арифметическое $a = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) : n$ или, применяя более удобную запись, $a = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) : n$. Значения a_i отнюдь не обязательно различны. Если a_1 повторяется n_1 раз, a_2 — n_2 раз, вообще a_i — n_i раз, то для определения среднего арифметического удобнее пользоваться формулой

$$a = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i n_i\right) : n,$$

где $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Этот весьма распространённый на практике способ вполне оправдывается теоретическими соображениями[1]), хотя наряду с ним употребляются и некоторые другие способы; например, располагают полученные значения в порядке возрастания и берут срединное значение, т. е. значение, одинаково удалённое от концов ряда («медиану»).

Приняв $x \approx a$, $a = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) : n$, мы должны выяснить, какова точность этого приближённого равенства. В школе эту оценку производят путём простого сравнения числа a с результатами отдельных измерений $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Среднее a округляют, сохраняя все цифры, остающиеся неизменными или почти неизменными во всех значениях a_i, и отбрасывая все последующие.

Можно рекомендовать вычисление отклонений от среднего, т. е. разностей $a - a_i$. Сумма этих разностей, как легко видеть, равна нулю (контроль!). Среднее из абсолютных значений этих разностей («среднее отклонение») можно считать характеристикой точности найденного среднего. С некоторой определённой вероятностью, подсчитываемой рассмотренным дальше способом, можно утверждать, что истинное значение x отличается от a меньше, чем на это среднее отклонение.

Пример. Пусть неизвестная величина измерена пять раз; результаты измерений приведены во втором столбце следующей таблицы:

i	a_i	$a - a_i$	$(a - a_i)^2$
1	4,781	$+0{,}0022$	0,00000 484
2	4,795	$-0{,}0118$	13 924
3	4,769	$+0{,}0142$	20 164
4	4,792	$-0{,}0088$	7 744
5	4,779	$+0{,}0042$	1 764
Сумма абсолютных значений	23,916	0,0412	0,00014080
Среднее a	4,7832	0,00824	

Какие цифры найденного среднего $a = 4{,}7832$ следует сохранить? Цифры целых (4) и десятых (7) повторяются во всех результатах отдельных измерений и безусловно надёжны. Цифры сотых колеблются, но весьма незначительно (от 6 до 9), поэтому третья цифра среднего (цифра сотых 8) тоже заслуживает доверия и подлежит сохранению. Возникает вопрос о цифре тысячных (3). Она

[1]) См. Э. э. м., кн. 6, Б. В. Гнеденко, Элементы теории вероятностей и математической статистики.

весьма ненадёжна и может быть отброшена, но обычно всё же такую первую сомнительную цифру предпочитают сохранять (уже из стремления сделать незаметной вводимую погрешность округления). Цифры же, расположенные правее этой первой сомнительной цифры, в данном случае цифра десятитысячных (2), подлежат отбрасыванию. Итак, в данном случае $x \approx a = 4{,}783$. Мы получили приближённое число с четырьмя значащими цифрами (с тремя десятичными знаками), причём первые три значащие цифры надёжны, четвёртая сомнительна. Этот же вывод подтверждается и вычислением среднего отклонения. Найдя отклонения от среднего, приведённые в третьем столбце таблички, подсчитываем отдельно положительные отклонения (сумма $+0{,}0206$) и отрицательные отклонения (сумма $-0{,}0206$), а потому сумма всех отклонений нуль, как и должно быть; сумма абсолютных значений отклонений равна $0{,}0206 \cdot 2 = 0{,}0412$, среднее отклонение $0{,}0412 : 5 = 0{,}00824$ или после округления до одной значащей цифры 0,008. Этот результат можно считать подтверждением сделанного выше заключения о надёжности цифры сотых и сомнительности цифры тысячных.

Такого рода оценкой точности среднего арифметического и приходится ограничиваться в школьной практике. Более точный, вполне обоснованный в теории ошибок способ обработки результатов равноточных измерений заключается в следующем (приводим только указания о практическом применении этого способа, отсылая желающих ознакомиться с его теорией к книге [7]; для понимания этой книги и нужны некоторые сведения из теории вероятностей, которые можно взять из книги [8] [1]).

Найдя среднее значение $a = \frac{\Sigma a_i}{n}$ и отклонения от среднего $a - a_i$, берут квадраты этих отклонений и вычисляют «среднее квадратическое отклонение» s по формуле $s^2 = \frac{\Sigma (a - a_i)^2}{n-1}$; это число s является характеристикой точности всего использованного ряда измерений. Далее, по формуле $s_a = s : \sqrt{n}$ находят «среднее квадратическое отклонение арифметического среднего». Вероятность α неравенства $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$, т. е. вероятность того, что искомое значение x отличается от найденного среднего значения a меньше, чем на некоторое произвольное число ε (в ту или другую сторону), зависит от отношения $t = \varepsilon : s_a$ и от числа измерений n (или, что то же, от числа $k = n - 1$) и выражается довольно сложной формулой, для которой составлена таблица, позволяющая по данным значениям $k = n - 1$ и t находить α, а также по данным k и α находить t, а следовательно, и ε. Приводим отрывок этой таблицы, заимствованный из книги [7].

---

[1]) См. также Э. э. м., кн. 6, Б. В. Гнеденко, Элементы теории вероятностей и математической статистики.

$k=n-1$	$t=2,0$	$t=2,5$	$t=3,0$	$t=3,5$	$k=n-1$	$t=2,0$	$t=2,5$	$t=3,0$	$t=3,5$
1	0,7048	0,7578	0,7952	0,8228	11	0,9292	0,9704	0,9880	0,9950
2	8164	8704	9046	9276	12	9314	9720	9890	9956
3	8606	9122	9424	9606	13	9332	9737	9898	9960
4	8838	9332	9600	9752	14	9348	9740	9904	9964
5	8980	9456	9700	9828	15	9360	9754	9910	9968
6	9076	9534	9760	9872	16	9372	9764	9916	9970
7	9144	9590	9800	9900	17	9382	9770	9920	9972
8	9194	9630	9830	9920	18	9392	9776	9924	9974
9	9234	9662	9850	9932	19	9400	9782	9926	9976
10	9266	9686	9863	9942	20	9408	9788	9930	9978
					∞	9545	9876	9973	9995

Возвращаясь к рассмотренному выше примеру, имеем $n=5$, $k=4$, $a=4{,}7832$, $s^2=0{,}00044080:4=0{,}00011020$, $s=0{,}0105$, $s_a=0{,}0105:\sqrt{5}=0{,}0021\cdot\sqrt{5}=0{,}00469$. Найдём, при каком значении ε вероятность неравенства $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$ равна 0,96. Таблица показывает, что при $k=4$ вероятность $\alpha=0{,}96$, если $t=3{,}0$, а потому $\varepsilon=t\cdot s_a=3{,}0\cdot 0{,}00469\approx 0{,}0141$. Итак, с вероятностью в 0,96 можно утверждать, что истинное значение x отличается от найденного среднего $a=4{,}7832$ меньше, чем на $\varepsilon=0{,}0141$. Другими словами, 96 из каждых ста шансов за то, что x отличается от $a=4{,}7832$ меньше, чем на $\varepsilon=0{,}0141$, и только четыре против. Как видно из таблицы, чем больше число измерений n, тем больше при постоянном t и вероятность α, а при одном и том же числе измерений n эта вероятность α растёт с ростом $t=\varepsilon:s_a$, т. е. с ростом ε и убыванием s_a.

Посмотрим ещё, как велика вероятность того, что истинное значение x отличается от среднего $a=4{,}7832$ меньше, чем на величину найденного среднего отклонения 0,00824. Теперь $\varepsilon=0{,}00824$, $t=0{,}00824:0{,}00469=1{,}76$. Таблица показывает, что здесь α несколько меньше, чем 0,8838; можно считать, что $\alpha\approx 0{,}85$.

В заключение настоящего параграфа отметим, что наибольшее значение для школы имеет тот простейший способ оценки точности результатов однократных измерений, о котором шла речь в его начале. Если учащиеся средней школы будут приучены при проведении каждого измерения указывать границу абсолютной погрешности результата или, что сводится к тому же, устанавливать низшую и высшую границы искомого неизвестного числа, то тем самым будет сделан существенный шаг вперёд в деле устранения формального усвоения школьной математики.

ГЛАВА II

УЧЁТ ПОГРЕШНОСТЕЙ

§ 8. Вычисления со строгим учётом погрешностей по способу границ

Производя какое-нибудь вычисление с приближёнными данными, мы получаем результат, по необходимости тоже приближённый. На нём не могут не сказаться как погрешности данных, так и «вычислительные погрешности», обусловленные неизбежными округлениями, производимыми в ходе вычисления. Возникает вопрос первостепенной важности: как оценить точность результата такого вычисления с приближёнными данными?

Наилучший в смысле строгости и доступности способ такого «учёта погрешностей» в результатах вычислений представляет собой **способ границ**. Зная низшую и высшую границы (НГ и ВГ) каждого из данных, без особого труда (по крайней мере в более простых случаях) устанавливают НГ и ВГ результата каждого действия над этими данными и в конце концов получают НГ и ВГ искомого окончательного результата. Именно этот способ применил Архимед в своей знаменитой работе «Измерение круга». Он не ограничился получением приближённого значения отношения окружности к диаметру, равным 22 : 7, а показал, что это отношение, обозначаемое теперь буквой π, больше чем $3\frac{10}{71}$ и меньше чем $3\frac{1}{7}$, т. е. установил, что НГ $\pi = 3\frac{10}{71}$, ВГ $\pi = 3\frac{1}{7}$.

«Архимед последовательно определяет стороны описанных 6-угольника, 12-угольника, 24-угольника, 48-угольника и 96-угольника, выраженные с помощью диаметра, а именно, с тонким математическим чутьём он даёт для определяемого лишь приближённо отношения диаметра к стороне описанного многоугольника всегда несколько меньшее значение для того, чтобы получить для его периметра и, тем более для длины окружности, верную верхнюю границу... Чтобы найти нижнюю границу отношения длины окружности к диаметру, Архимед пользовался соответствующими вписанными многоугольниками. При этих вычислениях Архимед с той же сознательной уверенностью берёт встречающиеся квадратные корни всякий раз так, чтобы получить для соответствующих сторон многоугольника немного меньшие значения. Таким образом, он получает для периметра вписанного многоугольника, а следовательно, тем более для окружности, верную нижнюю границу» [1]).

Теоретическая сторона способа границ в высшей степени проста. Она сводится к использованию хорошо известных ещё с первых классов школы предложений об изменении результатов действий в зависимости от изменения компонентов. Ограничиваясь первыми четырьмя арифметическими действиями, имеем такие предложения о границах (неизвестные x и y предполагаются положительными):

$$\text{НГ}(x+y)=\text{НГ}\,x+\text{НГ}\,y,\quad \text{ВГ}(x+y)=\text{ВГ}\,x+\text{ВГ}\,y,$$
$$\text{НГ}(x-y)=\text{НГ}\,x-\text{ВГ}\,y,\quad \text{ВГ}(x-y)=\text{ВГ}\,x-\text{НГ}\,y,$$
$$\text{НГ}(xy)=\text{НГ}\,x\cdot\text{НГ}\,y,\quad \text{ВГ}(xy)=\text{ВГ}\,x\cdot\text{ВГ}\,y,$$
$$\text{НГ}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\text{НГ}\,x}{\text{ВГ}\,y},\quad \text{ВГ}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\text{ВГ}\,x}{\text{НГ}\,y}.$$

Сюда надо присоединить ещё три предложения, вытекающих непосредственно из определений НГ и ВГ: 1) округлять НГ можно только по недостатку, ВГ — только по избытку; 2) чем меньше разность ВГ$\,x$ — НГ$\,x$, тем точнее определяется x; 3) в качестве приближённого значения x рекомендуется брать среднее арифметическое чисел НГ$\,x$ и ВГ$\,x$ или число, близкое к этому среднему.

Простейшие применения способа границ не представляют никаких затруднений и вполне разъясняются следующим примером.

Пример 1. Найти $x=\frac{a+b}{(a-b)c}$ при $a=3\frac{4}{7}$, $b=3\frac{5}{11}$, $c=28\frac{1}{3}$, заменяя точные значения a, b, c их приближёнными значениями, взятыми с точностью до сотых долей.

Решение.

	НГ	ВГ
a	3,57	3,58
b	3,45	3,46
$a+b=m$	7,02	7,04
$a-b$	0,11	0,13
c	28,33	28,34
$(a-b)c=n$	3,11	3,69
$x=\frac{m}{n}$	1,90	2,27

$$\begin{array}{r} 2{,}27\\ +\;1{,}90\\ \hline 4{,}17:2=2{,}085\end{array}\qquad \begin{array}{r} 2{,}27\\ -\;1{,}90\\ \hline 0{,}37:2=0{,}185\end{array}$$

$$x\approx 2{,}085\ (\pm 0{,}185)$$
$$x\approx 2{,}1\quad (\pm 0{,}2)$$

[1]) Ф. Рудио, О квадратуре круга, перев. с нем., под ред. и с примеч. акад. С. Н. Бернштейна, ГТТИ, изд. 3-е, 1936, стр. 31—32.

Пояснение. Получив двойное неравенство $1{,}90 < x < 2{,}27$, естественно взять в качестве приближённого значения для x среднее между найденными границами, а именно, 2,085, но при этом может получиться впечатление, что мы нашли x с точностью до тысячных. Этого «очковтирательства» не будет, если одновременно указать, как велико наибольшее возможное отклонение истинного значения от этого среднего, т. е. указать *границу абсолютной погрешности* этого среднего, равную полуразности границ, и записать ответ в виде приближённого равенства $x \approx 2{,}085\,(\pm 0{,}185)$. Далее, округляем найденное значение так, чтобы в нём оставалась только одна сомнительная цифра. Взяв $x \approx 2{,}1$ и замечая, что $2{,}1 - 1{,}9 = 0{,}2$; $2{,}27 - 2{,}1 = 0{,}17$, имеем окончательно $x \approx 2{,}1\ (\pm 0{,}2)$.

В данном примере точные значения a, b, c нам известны, и мы можем сравнить полученный результат с точным значением x, равным $2\frac{31}{255} = 2{,}1215\ldots$ Как видим, это точное значение действительно содержится внутри указанных нами границ 1,90 и 2,27. Найденное нами приближённое значение 2,1 отличается от истинного очень немного: мы ручались, что оно отличается от истинного меньше, чем на 0,2, а в действительности разница едва превосходит 0,02. Таким образом, оценка погрешности оказалась преувеличенной; это наблюдается почти всегда.

Приводим полностью выкладки, нужные для решения примера, рассмотренного на стр. 378: найти $\delta = p : v$, $v = \pi r^2 h$, если $2r \approx 0{,}48\,(\pm 0{,}005)$ *мм*, $h \approx 264{,}4\,(\pm 0{,}1)$ *мм*, $p \approx 0{,}423\,(\pm 0{,}001)$ *г*; значения r и h надо выразить в сантиметрах.

Значения πr^2 взяты по таблице площади круга.

	НГ	ВГ
$2r$	0,0475	0,0485
πr^2	0,001772	0,001847
h	26,43	26,45
$v = \pi r^2 h$	0,0468	0,0489
p	0,422	0,424
$\delta = p : v$	8,63	9,05

$$\begin{array}{r} 9{,}05 \\ +\ 8{,}63 \\ \hline 17{,}68 : 2 = 8{,}84 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9{,}05 \\ -\ 8{,}63 \\ \hline 0{,}42 : 2 = 0{,}21 \end{array}$$

$$\delta \approx 8{,}84\ (\pm 0{,}21),$$
$$\delta \approx 8{,}8\ \ (\pm 0{,}25).$$

Рассмотрим более трудный пример, доступный учащимся IX и X классов.

Пример 2. Вычислить с четырьмя точными десятичными знаками значения $\sin 3°$ и $\cos 3°$, исходя из формул $a_6 = r$, $a_{10} = 0{,}5\,r\,(\sqrt{5} - 1)$, выражающих длины сторон правильных 6-угольника и 10-угольника, вписанных в круг радиуса r.

Решение.

$\sin 30° = 0,5a_6 : r = 0,5;\quad \cos 30° = \sqrt{1 - 0,25} = 0,5\sqrt{3};$

$\sin 18° = 0,5a_{10} : r = 0,25(\sqrt{5} - 1);\quad \cos 18° = 0,25\sqrt{10 + \sqrt{20}};$

$\sin 15° = \sqrt{0,5(1 - \cos 30°)} = 0,5\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0,25(\sqrt{6} - \sqrt{2});$

$\cos 15° = \sqrt{0,5(1 + \cos 30°)} = 0,5\sqrt{2 + \sqrt{3}} = 0,25(\sqrt{6} + \sqrt{2});$

$\sin 3° = \sin(18° - 15°) = \sin 18° \cos 15° - \cos 18° \sin 15°;$

$\cos 3° = \cos 18° \cos 15° + \sin 18° \sin 15°.$

Вычисление.

$$\sin 15° = 0,25(\sqrt{6} - \sqrt{2}),\quad \cos 15° = 0,25(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

	НГ	ВГ
$\sqrt{6}$	2,44948	2,44950
$\sqrt{2}$	1,41420	1,41422
$a_1 = \sqrt{6} - \sqrt{2}$	1,03526	1,03530
$b_1 = \sqrt{6} + \sqrt{2}$	3,86368	3,86372
$\sin 15° = a_1 : 4$	0,25881	0,25883
$\cos 15° = b_1 : 4$	0,96592	0,96593

Результат (с четырьмя точными десятичными знаками):

$\sin 15° \approx 0,2588,$

$\cos 15° \approx 0,9659.$

Вычисление.

$$\sin 18° = 0,25(\sqrt{5} - 1),\ \cos 18° = 0,25\sqrt{10 + \sqrt{20}}.$$

	НГ	ВГ
$\sqrt{5}$	2,23606	2,23608
$a_2 = \sqrt{5} - 1$	1,23606	1,23608
$\sin 18° = a_2 : 4$	0,30901	0,30902
$\sqrt{20}$	4,47213	4,47215
$b_2 = 10 + \sqrt{20}$	14,47213	14,47215
$c_2 = \sqrt{b_2}$	3,80421	3,80424
$\cos 18° = c_2 : 4$	0,95105	0,95106

Результат (с четырьмя точными десятичными знаками):

$\sin 18° \approx 0,3090,$

$\cos 18° \approx 0,9511.$

Вычисление.

$$\sin 3^\circ = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ,$$
$$\cos 3^\circ = \cos 18^\circ \cos 15^\circ + \sin 18^\circ \sin 15^\circ.$$

	НГ	ВГ
$a_3 = \sin\ 18^\circ$ $b_3 = \cos\ 15^\circ$ $c_3 = \cos\ 18^\circ$ $d_3 = \sin\ 15^\circ$	0,30901 0,96592 0,95105 0,25881	0,30902 0,96593 0,95106 0,25883
a_3b_3	0,29847	0,29849
c_3d_3	0,24614	0,24616
$\sin 3^\circ = a_3b_3 - c_3d_3$	0,05231	0,05235
b_3c_3 a_3d_3	0,91863 0,07997	0,91865 0,07998
$\cos 3^\circ = b_3c_3 + a_3d_3$	0,99860	0,99863

Результат (с четырьмя десятичными знаками):

$$\sin 3^\circ \approx 0{,}0523,$$
$$\cos 3^\circ \approx 0{,}9986.$$

Для контроля можно было бы вычислить сумму $s = \sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ$ и убедиться, что НГ$s < 1$, ВГ$s > 1$, как и должно быть, но проще навести справку в таблицах. По четырёхзначной таблице получаем как раз найденные у нас значения $\sin 3^\circ$ и $\cos 3^\circ$, а шестизначная таблица (Петерса) даёт: $\sin 3^\circ = 0{,}052336$, $\cos 3^\circ = 0{,}998630$, что вполне согласуется с нашими результатами. Отметим, что более точное значение $\cos 3^\circ$ есть 0,99862995.

§ 9. Вычисления со строгим учётом погрешностей по способу границ погрешностей

При всей своей строгости и доступности способ границ, требуя вычисления НГ и ВГ, оказывается весьма громоздким: все выкладки приходится повторять дважды. Естественно, возникает вопрос: нельзя ли указать такой способ вычисления со строгим учётом погрешностей, который давал бы возможность находить приближённое значение искомого числа и границу его погрешности в зависимости от приближённых значений данных и границ их погрешности без вычисления НГx и ВГx?

Пусть известно, что $x \approx a(\pm \Delta a)$ и $y \approx b(\pm \Delta b)$, и требуется найти приближённые значения чисел $x+y$, $x-y$, xy, $\frac{x}{y}$, x^n, $\sqrt[n]{x}$ (n — натуральное число), характеризуя их точность.

Из неравенств

$$a - \Delta a < x < a + \Delta a, \tag{1}$$

$$b - \Delta b < y < b + \Delta b \tag{2}$$

почленным сложением получаем неравенство

$$a + b - (\Delta a + \Delta b) < x + y < a + b + (\Delta a + \Delta b). \tag{3}$$

Если умножить все члены неравенства (2) на -1 и переписать его в виде

$$-b - \Delta b < -y < -b + \Delta b,$$

то почленное сложение его с (1) даёт неравенство

$$a - b - (\Delta a + \Delta b) < x - y < a - b + (\Delta a + \Delta b). \tag{4}$$

Объединяя неравенства (3) и (4), получаем следующую теорему:

Теорема I. *Граница абсолютной погрешности суммы и разности приближённых чисел равна сумме границ абсолютных погрешностей этих чисел.* Эта теорема обобщается на алгебраическую сумму с любым числом членов.

Предполагая все члены неравенств (1) и (2) положительными, почленно перемножаем эти неравенства и получаем:

$$ab - (a\,\Delta b + b\,\Delta a) + \Delta a\,\Delta b < xy < ab + (a\,\Delta b + b\,\Delta a) + \Delta a\,\Delta b. \tag{5}$$

Произведение $\Delta a\,\Delta b$ в левой части можно отбросить, усиливая это неравенство. Но, считая числа Δa и Δb значительно меньшими, чем a и b, как это обычно и бывает на практике, мы отбросим это произведение $\Delta a\,\Delta b$, представляющее собой число «второго порядка малости» по отношению к произведению ab, и в правой части неравенства, лишая тем самым рассматриваемый способ границ погрешностей того безупречно строгого характера, какой имеет изложенный выше способ границ. Получаем новое неравенство

$$ab - (a\,\Delta b + b\,\Delta a) < xy < ab + (a\,\Delta b + b\,\Delta a), \tag{6}$$

или после понятных преобразований

$$-\left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right) < \frac{xy - ab}{ab} < \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}. \tag{7}$$

Последнее неравенство выражает новую теорему.

Теорема II. *Граница относительной погрешности произведения равна сумме границ относительных погрешностей сомножителей.*

Чтобы придти к аналогичной теореме о частном, найдём предварительно, чему равна граница относительной погрешности числа $1:b$ в зависимости от границы относительной погрешности $\frac{\Delta b}{b}$ числа b.

Предполагая опять все члены двойного неравенства (2) положительными, переписываем его в виде

$$\frac{1}{b+\Delta b}<\frac{1}{y}<\frac{1}{b-\Delta b}$$

и последовательно получаем:

$$\frac{1}{b+\Delta b}-\frac{1}{b}<\frac{1}{y}-\frac{1}{b}<\frac{1}{b-\Delta b}-\frac{1}{b},$$

$$-\frac{\Delta b}{b(b+\Delta b)}<\frac{1}{y}-\frac{1}{b}<\frac{\Delta b}{b(b-\Delta b)},$$

$$-\frac{\Delta b}{b+\Delta b}<\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{b}\right):\frac{1}{b}<\frac{\Delta b}{b-\Delta b}.$$

Дробь в левой части отличается от большей дроби $\frac{\Delta b}{b}$ на число второго порядка малости $\frac{(\Delta b)^2}{b(b+\Delta b)}$, а дробь в правой части — от меньшей дроби $\frac{\Delta b}{b}$ на число второго порядка малости $\frac{(\Delta b)^2}{b(b-\Delta b)}$. Вновь незначительно нарушая строгость рассуждения, приходим к неравенству

$$-\frac{\Delta b}{b}<\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{b}\right):\frac{1}{b}<\frac{\Delta b}{b}, \tag{8}$$

говорящему, что граница относительной погрешности числа $\frac{1}{b}$ одинакова с границей относительной погрешности числа b. Рассматривая частное $\frac{a}{b}$ как произведение $a\cdot\frac{1}{b}$, приходим теперь к теореме:

Теорема III. *Граница относительной погрешности частного равна сумме границ относительных погрешностей делимого и делителя.*

Простым следствием теоремы II является формула

$$\frac{-n\,\Delta a}{a}<\frac{x^n-a^n}{a^n}<\frac{n\,\Delta a}{a},$$

выражающая следующее предложение:

Теорема IV. *Граница относительной погрешности степени с натуральным показателем равна произведению границы относительной погрешности основания на показатель степени.*

Полагая же $y=\sqrt[n]{x}$, имеем формулу $x=y^n$, $\frac{\Delta x}{x}=\frac{n\,\Delta y}{y}$, откуда

$$\frac{\Delta y}{y}=\frac{\Delta x}{x}:n,$$

что можно сформулировать в виде следующего предложения:

Теорема V. *Граница относительной погрешности корня с натуральным показателем равна частному от деления границы относительной погрешности подкоренного числа на показатель корня.*

Покажем применение этих теорем на следующем примере.

Пример 1. Вычислить значение

$$t=\sqrt{\frac{2hd}{g(d-d_1)}},$$

зная, что

$$h\approx 25{,}3\,(\pm 0{,}1), \qquad d\approx 19{,}32\,(\pm 0{,}01),$$

$$d_1\approx 0{,}998\,(\pm 0{,}0005), \quad g\approx 982\,(\pm 0{,}5),$$

и указать границу абсолютной погрешности результата.

Решение. Здесь

$$\frac{\Delta t}{t}=\frac{0{,}5\,\Delta u}{u}, \quad u=\frac{2hd}{g(d-d_1)} \quad \text{(по теореме V);}$$

$$\frac{\Delta u}{u}=\frac{\Delta(2hd)}{2hd}+\frac{\Delta(gv)}{gv}, \quad v=d-d_1 \quad \text{(по теореме III);}$$

$$\frac{\Delta(2hd)}{2hd}=\frac{\Delta h}{h}+\frac{\Delta d}{d} \quad \text{(по теореме II; учтено, что } \Delta 2=0\text{);}$$

$$\frac{\Delta(gv)}{gv}=\frac{\Delta g}{g}+\frac{\Delta v}{v} \quad \text{(по теореме II);}$$

$$\Delta v=\Delta(d-d_1)=\Delta d+\Delta d_1 \quad \text{(по теореме I).}$$

Окончательно

$$\frac{\Delta t}{t}=0{,}5\left[\frac{\Delta h}{h}+\frac{\Delta d}{d}+\frac{\Delta g}{g}+\frac{\Delta d+\Delta d_1}{d-d_1}\right].$$

Приближённое значение t находим с помощью таблицы четырёхзначных логарифмов, границы погрешности — посредством счётной линейки.

$$\begin{array}{r|l}
d & 19{,}32 \\
d_1 & 0{,}998 \\
v=d-d_1 & 18{,}322 \\
\hline
\lg v & 1{,}2630 \\
\lg g & 2{,}9921 \\
\hline
\lg(gv) & 4{,}2551
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
\lg 2 & 0{,}3010 \\
\lg h & 1{,}4031 \\
\lg d & 1{,}2860 \\
\mathrm{clg}(gv) & \bar{5}{,}7449 \\
\hline
\lg t^2 & \bar{2}{,}7350 \\
\lg t & \bar{1}{,}3675 \\
t & 0{,}2331
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta h=0{,}1;\ \Delta d=0{,}01;\ \Delta d_1=0{,}0005;\ \Delta g=0{,}5;\\
&\Delta t:t=0{,}5\cdot[0{,}396+0{,}052+0{,}051+0{,}057]\ \%\\
&\qquad=0{,}5\cdot 0{,}454\%\\
&\qquad=0{,}227\%\\
&\Delta t=0{,}227\%\ \text{от}\ 0{,}2331\\
&\qquad=0{,}00053.
\end{aligned}$$

Ответ. $t \approx 0{,}2331$ ($\pm 0{,}00053$) $\approx 0{,}233$ ($\pm 0{,}00053$) или окончательно $t \approx 0{,}233$ ($\pm 0{,}001$).

Четвёртая значащая цифра результата, полученного с помощью четырёхзначных логарифмов, ненадёжна, а потому отброшена.

Для контроля и сравнения методов решим эту же задачу ещё раз, применяя способ границ и не пользуясь логарифмами.

	НГ	ВГ
h	25,2	25,4
$2h$	50,4	50,8
d	19,31	19,33
$2hd = a$	973,224	981,964
d_1	0,9975	0,9985
$d - d_1$	18,3115	18,3325
g	981,5	982,5
$g(d - d_1) = b$	17972	18012
$a : b = t^2$	0,05403	0,05465
t	0,2325	0,2338

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{l}0{,}2338\\0{,}2325\end{array} \\ \hline 0{,}4663 : 2 = 0{,}23315 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{l}0{,}2338\\0{,}2325\end{array} \\ \hline 0{,}0013 : 2 = 0{,}00065 \end{array}$$

$t \approx 0{,}2331$ ($\pm 0{,}0007$)

Здесь учтены все источники ошибок, а результат получился практически тот же, что и по способу границ погрешностей.

Все формулы для вычисления границ погрешностей, полученные выше с помощью элементарных рассуждений, получаются много проще посредством дифференцирования.

Пусть $f(x, y)$ — некоторая дифференцируемая функция от двух переменных x и y; x_0 и y_0 — некоторые частные значения этих переменных. Полагая $x = x_0 + \alpha$, $y = y_0 + \beta$, $|\alpha| < \Delta x$, $|\beta| < \Delta y$ и считая числа Δx и Δy данными и настолько малыми по сравнению с x_0 и y_0, что их степенями и их произведениями можно пренебречь, ставим себе задачей найти наибольшее по абсолютной величине значение разности $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ при условии, что приращения аргументов $\alpha = x - x_0$ и $\beta = y - y_0$ по абсолютной величине не превосходят соответственно Δx и Δy.

Как известно из курса математического анализа[1]), разность $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ [«приращение» функции $f(x, y)$] состоит из двух частей: из *главной части,* которая называется *полным дифференциалом* функции и которую вычисляют по формуле

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

(x и y заменяются в производных через x_0 и y_0), и из членов высшего порядка малости. Здесь dx и dy — дифференциалы аргументов x и y или, что то же самое, приращения этих аргументов $x - x_0$, $y - y_0$, обозначенные у нас буквами α и β (символы Δx и Δy означают у нас высшие границы этих приращений). Если Δx и Δy — числа весьма малые, что мы и будем предполагать, то числа α и β — тоже весьма малые, и всеми членами высшего

[1]) Э. э. м., кн. 3, статья «Дифференциальное и интегральное исчисления».

порядка малости можно пренебрегать. Приходим к заключению, что

$$f(x_0+\alpha,\ y_0+\beta)-f(x_0,\ y_0)\approx\frac{\partial f}{\partial x}\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\beta.$$

Пользуясь известной теоремой о модуле суммы («модуль суммы не больше суммы модулей слагаемых») и замечая, что модуль произведения равен произведению модулей сомножителей, преобразуем полученное неравенство заменой $|\alpha|$ и $|\beta|$ через Δx и Δy; имеем:

$$|f(x_0+\alpha,\ y_0+\beta)-f(x_0,\ y_0)|\leqslant\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\cdot|\alpha|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\cdot|\beta|<$$

$$<\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\cdot\Delta x+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\cdot\Delta y.$$

Численное значение последнего выражения (в нём x и y заменяются через x_0 и y_0) больше (по модулю) всех возможных при данных условиях значений разности между неизвестным точным значением функции $f(x_0+\alpha,\ y_0+\beta)$ и известным приближённым её значением $f(x_0,\ y_0)$, а потому может быть принято в качестве границы абсолютной погрешности числа $f(x_0,\ y_0)$ как приближения к $f(x,\ y)$.

Заключение это легко обобщается на функцию любого числа аргументов, и мы имеем формулу

$$\Delta f(x_0,\ y_0,\ z_0,\ \ldots)\approx\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\cdot\Delta x+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\cdot\Delta y+\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\cdot\Delta z+\ldots,\qquad\text{(A)}$$

по которой и вычисляется граница абсолютной погрешности. Отдельные члены правой части указывают ту долю общей погрешности, какая обусловлена погрешностями значений каждой из переменных в отдельности. Полагая, что функция $f(x,\ y)$ последовательно равна $x+y$, $x-y$, xy, $\frac{x}{y}$, x^n, $\sqrt[n]{x}$, легко получаем с помощью формулы (А) все рассмотренные выше теоремы I — V. Так, взяв $f(x,\ y)=\frac{x}{y}$, имеем: $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}$, и формула (А) даёт (при положительных значениях x и y): $\Delta\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{y}\Delta x+\frac{x}{y^2}\Delta y$, или после почленного деления на $\frac{x}{y}$:

$$\Delta\left(\frac{x}{y}\right):\frac{x}{y}=\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y},$$

т. е. теорему III.

Вот пример непосредственного применения формулы (А).

Пример 2. Вычислить сторону t треугольника, зная две другие его стороны $x\approx25{,}0\,(\pm0{,}2)$ *мм*, $y\approx30{,}0\,(\pm0{,}2)$ *мм* и угол между ними $z=60^\circ{,}0\,(\pm0^\circ{,}5)$.

Решение. Пользуясь формулой $t^2=x^2+y^2-2xy\cos z$ и применяя четырёхзначные таблицы, находим приближённое значение искомой стороны $t\approx27{,}84$ *мм*. Дифференцирование даёт:

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{x-y\cos z}{t},\quad\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{y-x\cos z}{t},\quad\frac{\partial t}{\partial z}=\frac{xy\sin z}{t},$$

и для границы абсолютной погрешности найденного приближённого значения t получаем, применяя формулу (А):

$$\Delta t=0{,}359\cdot0{,}2+0{,}628\cdot0{,}2+23{,}3\cdot0{,}00873=0{,}072+0{,}126+0{,}203=0{,}401.$$

Здесь Δz выражено в радианах.

Итак, приходим к результату $t \approx 27{,}84$ ($\pm 0{,}401$) *мм* или после обычного округления $t \approx 27{,}8$ ($\pm 0{,}46$) *мм*; можно ручаться, что искомая сторона треугольника отличается от отрезка 27,8 *мм* меньше, чем на 0,46 *мм*. Тот же результат получается и при применении способа границ.

До сих пор мы имели дело с задачами, в которых по известным границам погрешностей данных требовалось найти границу погрешности результата. Но иногда приходится решать. обратную задачу, а именно выяснять, с какой точностью необходимо знать данные, чтобы обеспечить некоторую наперёд указанную точность результата. При решении таких вопросов способ границ погрешностей имеет серьёзные преимущества перед способом границ. Не останавливаясь на такого рода задачах подробнее, ограничимся рассмотрением одного примера. Читателя, желающего ознакомиться с деталями, отсылаем к книгам [9] и [26].

С какой точностью надо взять вес p (в граммах) и объём v (в кубических сантиметрах) куска свинца, чтобы получить его плотность δ по формуле $\delta = \frac{p}{v}$ с погрешностью, не большей полупроцента?

На основании теоремы II пишем:

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} = \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta v}{v}.$$

Таким образом, сумма границ относительных погрешностей чисел p и v должна быть согласно заданию не больше $0{,}5\%$. Так как при взвешивании большая точность достигается гораздо легче, чем при измерении объёма, то отнесём на погрешность в определении веса только десятую часть этой погрешности, т. е. $0{,}05\%$, а остальные $0{,}45\%$ отнесём на погрешность в определении объёма. Если вес взятого куска свинца, определённый грубо приближённо, оказывается близким к 400 *г*, а его объём — близким к 40 *см*^{3}, то вес надо определить с погрешностью, не превосходящей $0{,}05\%$ от 400, т. е. 0,2 *г*, а объём — с погрешностью, не превосходящей 0,18 *см*^{3}. Имея в своём распоряжении весы, чувствующие 0,2 *г* при нагрузке в 400 *г*, и прибор для измерения объёма, позволяющий делать отсчёты до 0,1 *см*^{3}, мы достигнем требуемой точности в определении искомой плотности.

Мы ознакомились с двумя способами, дающими возможность делать вполне определённые заключения о точности результатов вычисления, зная точность данных, т. е. с двумя способами «строгого учёта погрешностей». Какой же из них, способ границ или способ границ погрешностей, заслуживает предпочтения?

Очевидными преимуществами способа границ являются: 1) чрезвычайная его простота, сводящая всю его теорию к одному основному принципу, применение которого на практике не вызывает никаких затруднений даже у мало подготовленного вычислителя; 2) его универсальность, так как применять его можно ко всяким числовым расчётам, от самых простых до самых сложных; 3) его строгость, позволяющая получать безусловно достоверные результаты благодаря возможности учитывать как погрешности от неточности данных, так и вычислительные погрешности; 4) контроль правильности вычислений, получающийся при сравнении результатов двух параллельных рядов операций.

Способ границ погрешностей превосходит способ границ в том отношении, что 1) позволяет заранее учитывать погрешность от неточности данных и даёт тем самым более или менее надёжное указание о той точности, с какой надо вести вычисление; 2) выясняет, какая доля общей погрешности результата обусловлена погрешностью каждого приближённого данного.

Способ границ погрешностей не отличается той безусловной строгостью, какая присуща способу границ как вследствие отбрасывания членов высшего порядка малости, так и в силу того, что учитываются только погрешности от неточности данных.

С первого взгляда кажется, что существенным недостатком способа границ является необходимость дважды повторять всё вычисление. Однако, сравнивая два решения одной и той же задачи, одно с учётом погрешностей по способу границ, другое — по способу границ погрешностей, убеждаемся, что общее количество выкладок в обоих случаях почти одинаково. Дело в том, что вычисление границы погрешности тоже требует некоторого труда. Правда, вычисление это можно упростить, пользуясь грубыми приближениями, но тогда либо получаются весьма ненадёжные результаты, либо излишне увеличиваются границы погрешностей. Необходимо отметить, что при вычислении по формуле, содержащей только действия второй и третьей ступеней, вычисление по способу границ погрешностей выполняется определённо скорее, чем по способу границ. Иначе обстоит дело, если в формулу наряду с действиями второй и третьей ступеней входят также действия первой ступени.

В случаях, когда требуется не абсолютная достоверность, а лишь более или менее высокая вероятность, как это обыкновенно бывает при обработке данных опыта и наблюдения, чаще пользуются вычислением границ погрешностей. В случаях же, когда такая абсолютная достоверность необходима (и по существу дела возможна), например при составлении математических таблиц, лучше употреблять способ границ.

В дидактическом отношении способ границ имеет очевидные преимущества перед способом границ погрешностей, и именно способ границ надо рекомендовать для первого ознакомления со способами строгого учёта погрешностей.

§ 10. Предельные погрешности результатов действий над приближёнными значениями. Правила подсчёта цифр

Если известно, сколько точных цифр имеет каждое приближённое данное, и если, кроме того, известны сами эти данные, то в каждом отдельном случае, основываясь на одном из рассмотренных выше способов (границ или границ погрешностей), мы можем установить, сколько заслуживающих доверия цифр содержит результат, и округлить его надлежащим образом. Естественно возникает вопрос: нельзя ли сделать какие-либо заключения о точности результатов, зная только число точных цифр каждого из данных, но не зная самих данных? Оказывается, такие заключения возможны и с успехом используются в вычислительной практике. Их часто называют «правилами подсчёта цифр» или «правилами округления результатов действий над приближёнными числами». Чтобы придти к этим правилам, надо установить, какого наибольшего значения достигают результаты действий над компонентами, имеющими данное число точных цифр. Назовём «предельной погрешностью» результата каждого действия границу его абсолютной погрешности, вычисленную в предположении, что компоненты даны с определённым числом точных цифр, и займёмся вычислением этих предельных погрешностей для разных случаев. Предельную погрешность будем обозначать буквой ε.

Проще всего определяется предельная погрешность алгебраической суммы. Если компоненты (слагаемые и вычитаемые) даны с каким угодно числом десятичных знаков, причём компонент с наименьшим числом десятичных знаков имеет k десятичных знаков (k — целое неотрицательное число), а всего имеется n компонентов, то $\varepsilon = 0{,}5 \cdot n \cdot 10^{-k}$. Истинная абсолютная погрешность суммы равняется этой предельной погрешности в случае, когда все компоненты имеют по k десятичных знаков и каждый имеет максимальную возможную погрешность в пол-единицы разряда последней цифры, причём все — одного знака. Таким образом, эта предельная погрешность для общего случая не может быть понижена.

Эти соображения являются достаточным обоснованием следующего практического правила:

Правило I подсчёта цифр. *При сложении и вычитании приближённых чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближённом данном с наименьшим числом десятичных знаков.*

Напоминаем, что десятичными знаками числа называются те его цифры, какие расположены справа от знака дробности. Все приближённые данные предполагаются округлёнными так, чтобы в них оставались только цифры, заслуживающие доверия. Целые числа с нулями справа, заменяющими неизвестные цифры, рекомендуется писать в виде произведений на некоторую степень 10 с целым показателем (например, приближённое число 347 000, являющееся результатом округления некоторого точного числа до разряда тысяч, лучше писать в виде $347 \cdot 10^3$ или $3,47 \cdot 10^5$ и т. д.).

Необходимость округления, указываемого настоящим правилом, становится очевидной, если рассмотреть какой-либо конкретный пример, заменяя особыми знаками, например знаками вопроса, неизвестные цифры приближённых данных. Пусть, например, требуется найти сумму трёх указанных ниже приближённых слагаемых, из которых первое является результатом округления неизвестного истинного значения до трёх десятичных знаков, второе — до 1, третье — до 2. Производя сложение обычным порядком так, как это делается в случае точных компонентов, мы получаем число 87,943, в котором цифры сотых и тысячных никакого доверия не заслуживают и должны быть отброшены, что и рекомендует сделать правило I.

$$\begin{array}{r} 0{,}423?\,.\,. \\ +\,72{,}8???\,.\,. \\ 14{,}72??\,.\,. \\ \hline 87{,}943?\,.\,. \\ \hline 87{,}9 \end{array}$$

В настоящем примере истинная абсолютная погрешность суммы может лишь незначительно превзойти пол-единицы разряда последней цифры, но легко указать случаи, когда она будет составлять несколько единиц этого разряда. Заслуживает ли доверия эта последняя цифра? Этот вопрос будет рассмотрен в §§ 11 и 12.

Переходя к умножению, формулируем следующую теорему о предельной погрешности:

Теорема 1. *Произведение двух приближённых чисел, имеющих каждое k точных значащих цифр, имеет предельную погрешность, равную* 5,5 *единицы разряда к-й значащей цифры; это значение предельной погрешности снижается до* 5,05 *для случая, когда один из приближённых сомножителей имеет k точных значащих цифр, другой $k+1$ цифру, и до* 5, *когда один из сомножителей имеет k точных значащих цифр, другой же точен.*

Вот пример случая, когда истинная абсолютная погрешность произведения близка к указанной в теореме предельной погрешности: $x = 100{,}499$, $y = 9{,}99499$, $xy = 1004{,}486\ldots$, $a = 100$, $b = 9{,}99$, $ab = 999$. Здесь произведение приближённых трёхзначных чисел a и b отличается от произведения точных чисел x и y на 5,486... единиц разряда 3-й значащей цифры.

Приводим доказательство теоремы, ограничиваясь случаем $k = 3$ (легко видеть, что для произвольного значения k это доказательство сохраняет силу, требуя лишь несколько более длинной записи). Положение знака дробности в данных безразлично; будем для определённости считать запятую поставленной в первом из данных после третьей значащей цифры, во втором — после первой. Пусть точные значения сомножителей a и b суть x и y, так что $x = a + \alpha$, $y = b + \beta$, где α и β — истинные абсолютные погрешности приближённых чисел a и b. Согласно сказанному выше имеем:

$$100 \leqslant a \leqslant 999; \quad 1{,}00 \leqslant b \leqslant 9{,}99; \quad |\alpha| \leqslant 0{,}5; \quad |\beta| < 0{,}005.$$

Надо дать оценку разности $xy - ab = a\beta + b\alpha + \alpha\beta$ в единицах разряда третьей значащей цифры произведения ab. Имеем:

$$|xy - ab| \leqslant 0{,}005\,a + 0{,}5\,b + 0{,}0025$$

или

$$|xy - ab| \leqslant 0{,}005\,(a + 100\,b) + 0{,}0025.$$

Рассмотрим порознь случаи, когда произведение ab имеет 1) три и 2) четыре цифры до знака дробности. Неравенство $100 \cdot 1{,}00 \leqslant ab \leqslant 999 \cdot 9{,}99$ показывает, что только эти два случая и возможны.

В первом случае $ab \leqslant 999{,}99$; $100\,b \leqslant \frac{p^2}{a}$, где $p^2 = 99\,999$, а потому

$$a + 100\,b \leqslant a + \frac{p^2}{a}.$$

Дифференцируя функцию $a + \frac{p^2}{a}$ по a, убеждаемся, что при непрерывном изменении a от $a = 100$ до $a = 999$ она сначала убывает (от значения 1099,99 при $a = 100$ до значения $2p = 632{,}4\ldots$ при $a = p = 316{,}2\ldots$), потом растёт $\left(\text{от значения } 2p \text{ при } a = p \text{ до значения } 1099 + \frac{99}{999} \text{ при } a = 999\right)$. Но, принимая во внимание, что сумма $a + 100\,b$ принимает при сделанных предположениях только целые значения, заключаем, что наибольшее возможное её значение есть 1099, а потому

$$|xy - ab| \leqslant 0{,}005 \cdot 1099 + 0{,}0025 = 5{,}4975 < 5{,}5,$$

что и доказывает первую часть теоремы для случая, когда произведение имеет три значащие цифры до знака дробности.

Во втором случае, когда произведение ab имеет не три, а четыре цифры до знака дробности, наибольшее возможное значение его погрешности вычисляется гораздо проще. Действительно, теперь

$$|xy - ab| \leqslant 0{,}005 \cdot 999 + 0{,}5 \cdot 9{,}99 + 0{,}0025 = 9{,}9925 < 10.$$

При четырёх значащих цифрах до знака дробности третья значащая цифра есть цифра десятков, и у нас, следовательно, доказано, что число $|xy - ab|$ меньше одной единицы разряда третьей значащей цифры произведения. Первая часть теоремы тем самым доказана и для второго случая.

Если один из приближённых сомножителей имеет $k = 3$ точных значащих цифры, другой $k + 1 = 4$, то, рассуждая по предыдущему, имеем:

$$100 \leqslant a \leqslant 999; \quad 1{,}000 \leqslant b \leqslant 9{,}999; \quad |\alpha| \leqslant 0{,}5; \quad |\beta| \leqslant 0{,}0005;$$

$$|xy - ab| \leqslant 0{,}0005\,a + 0{,}5\,b + 0{,}00025 = 0{,}0005\,(a + 1000\,b) + 0{,}00025.$$

Если произведение ab имеет три цифры левее запятой, то

$$ab \leqslant 999{,}999; \quad 1000\,b \leqslant \frac{p^2}{a},$$

где $p^2 = 999\,999$, а потому

$$a + 1000\,b \leqslant a + \frac{p^2}{a}.$$

Эта последняя сумма при изменении a от 100 до 999 только убывает, так как её минимум достигается при $a = p = 999{,}99\ldots$, и следовательно, наибольшее возможное её значение есть $100+9999{,}99=10\,099{,}9\ldots$; сумма же $a+1000\,b$, принимающая только целые значения, не может превзойти числа 10 099. Отсюда заключаем, что

$$|xy-ab|\leqslant 0{,}0005\cdot 10\,099+0{,}00025=5{,}04975<5{,}05.$$

Если же произведение ab имеет до запятой четыре цифры, то

$$|xy-ab|\leqslant 0{,}4995+4{,}9995+0{,}00025=5{,}49925<5{,}5$$

или 0,55 единицы разряда третьей значащей цифры. Тем самым доказана и вторая часть теоремы.

Переходя к третьей её части, имеем:

$$x=a+\alpha;\quad 100\leqslant a\leqslant 999;\quad |\alpha|\leqslant 0{,}5;\quad y=b;\ 1\leqslant b<10;$$
$$|xy-ab|\leqslant 0{,}5\,b\leqslant 5.$$

Когда произведение содержит три значащие цифры левее знака дробности, его погрешность не больше пяти единиц разряда третьей значащей цифры, а когда четыре, т. е. когда третья значащая цифра есть цифра десятков, то не больше 0,5 единицы разряда третьей значащей цифры.

Теорема доказана полностью.

Основываясь на формулированной выше теореме, делаем практически важные заключения. Если один из сомножителей — приближённое число с k точными значащими цифрами, а другой сомножитель не менее точен, т. е. является либо приближённым числом, имеющим тоже k или больше точных значащих цифр, либо точным, то в произведении нет смысла сохранять больше чем k значащих цифр: уже k-я значащая цифра сомнительна. Возникает даже вопрос о том, стоит ли сохранять эту k-ю значащую цифру (этот вопрос будет решён положительно в §§ 11 и 12). Далее, имея два сомножителя с разным числом значащих цифр, без ущерба для точности результата можно предварительно округлить более точный сомножитель так, чтобы в нём было только одной значащей цифрой больше, чем в менее точном, имеющем k точных значащих цифр: предельная погрешность в результате такого округления едва меняется, а именно, растёт самое большее с 5 до 5,05 единицы разряда k-й значащей цифры произведения. Но эту лишнюю («запасную») цифру в более точном сомножителе сохранять стоит, так как её отбрасывание вызывает заметное увеличение предельной погрешности произведения, а именно, с 5,05 до 5,5 единицы k-й значащей цифры.

Исследуя аналогичным образом частное, приходим к следующему предложению:

Теорема 2. *Частное от деления двух приближённых чисел, данных каждое с k точными значащими цифрами, имеет предельную погрешность, равную 10 единицам k-й значащей цифры; это значение предельной погрешности снижается до 5,5 единицы, когда один из компонентов имеет k точных значащих цифр, другой $k+1$ цифру; до 5,22 единицы, когда делимое — число точное, а делитель имеет k точных значащих цифр, и до 5 еди-*

ниц, когда делимое имеет k точных значащих цифр, а делитель — число точное.

Доказательство этой теоремы, проводимое аналогично доказательству предыдущей теоремы, опускаем. Оценка предельной погрешности произведения и частного делает очевидной целесообразность следующего практического правила.

Правило II подсчёта цифр. *При умножении и делении следует сохранять в результате столько значащих цифр, сколько их имеет приближённое данное с наименьшим числом значащих цифр.*

Сомнение относительно целесообразности сохранения k-й значащей цифры произведения, ошибка в которой может доходить до 5,5 единицы, и тем более k-й значащей цифры частного, ошибка в которой может доходить до 10 единиц, будет устранено соображениями, изложенными в §§ 11 и 12.

Целесообразность этого правила, как и правила I, хорошо уясняется путём рассмотрения конкретных примеров с заменой неизвестных цифр знаками вопроса. Приводим четыре таких примера, понятных без особых пояснений. Заслуживающие доверия цифры отделены вертикальной пунктирной чертой. Подробнее о такого рода примерах можно прочесть в книге [2a].

$$\begin{array}{r|l} \times & 9,56? \\ & 2,18? \\ \hline & ???? \\ 7 & 648? \\ 9 & 56? \\ 191 & 2? \\ \hline 208 & 408?? \\ \hline 20,8 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 3,143? \\ & 0,85? \\ \hline & ????? \\ 1 & 5715? \\ 25 & 144? \\ \hline 26 & 7155?? \\ \hline 2,7 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 936 & ?:218? = 4,29 \\ 872 & ? \\ \hline 64 & ?? \\ 43 & 6? \\ \hline 20 & 4?? \\ 19 & 62? \\ \hline & 78? \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 65 & 4,7?:2,6? = 250 \\ 52 & ? \quad (\text{лучше } 2,5 \cdot 10^2). \\ \hline 13 & 47 \\ 13 & 0? \\ \hline & 47 \end{array}$$

Переходя к действиям III ступени (возведению в степень и извлечению корня) и ограничиваясь только случаями, когда показателями степени и корня являются числа 2 и 3, без труда доказываем следующие две теоремы.

Теорема 3. *Квадрат и куб приближённого числа, имеющего k точных значащих цифр, может иметь абсолютную погрешность, приближающуюся соответственно к* 3,5 *единицы и* 7,2 *единицы k-й значащей цифры, но никогда не превосходящую этих предельных значений.*

Теорема 4. *Квадратный и кубический корень из приближённого числа, имеющего k точных значащих цифр, может иметь абсолютную погрешность, приближающуюся соответственно к* 0,81 *и* 0,79 *единицы разряда k-й значащей цифры, но никогда не превосходящую этих предельных значений.*

Эти теоремы дают основание установить для возведения в квадрат и куб и для извлечения квадратного и кубического корня такие два правила:

Правило III подсчёта цифр. *При возведении в квадрат и куб в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближённое число.*

Правило IV подсчёта цифр. *При извлечении квадратного и кубического корней в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет приближённое значение подкоренного числа.*

Приведённые выше значения предельных погрешностей, а также соображения, изложенные ниже в §§ 11 и 12, позволяют сделать следующие примечания к этим двум правилам: последняя цифра квадрата и особенно куба при этом менее надёжна, чем последняя цифра основания, а последняя цифра квадратного и особенно кубического корня более надёжна, чем последняя цифра подкоренного числа.

Откладывая рассмотрение практических применений правил подсчёта цифр до § 13, отметим сейчас только то обстоятельство, что указанные выше значения предельных погрешностей при применении правил подсчёта цифр увеличиваются ещё максимум на 0,5 в каждом случае за счёт погрешности, вносимой округлением результата. В табличке на стр. 411 приведены как указанные выше, так и эти увеличенные значения предельных погрешностей.

Небезынтересно подметить связь, существующую между правилами подсчёта цифр (I—IV) и теоремами о границах абсолютных и относительных погрешностей, установленными в § 9. При сложении и вычитании приближённых чисел приходится складывать границы абсолютных погрешностей данных, определяемые числом точных десятичных знаков в этих данных, а при умножении и делении складываются границы относительных погрешностей данных, определяемых числом точных значащих цифр в данных. Это обстоятельство объясняет, почему при сложении и вычитании приходится подсчитывать десятичные знаки, а при умножении и делении — значащие цифры. Умножение границы относительной погрешности на показатель степени при возведении в степень и её деление на показатель корня при извлечении корня делают понятными снижение точности в первом случае и её повышение во втором.

§ 11. Средние квадратические погрешности результатов действий над приближёнными числами. Принцип академика А. Н. Крылова

В тех случаях, когда мы имеем возможность, кроме границы погрешности, т. е. наибольшего возможного её значения, установить также и истинную погрешность результата, мы каждый раз видим, что эта истинная погрешность значительно меньше наибольшей возможной. Явление это бывает выражено тем ярче, чем больше приближённых чисел участвует в вычислении. Возьмём, например, сумму четырёхзначных логарифмов 20 последовательных чисел от 11 до 30 включительно. Граница абсолютной погрешности каждого такого логарифма есть 0,00005, а суммы 20 логарифмов есть $0{,}00005 \times 20 = 0{,}001$. Произведя сложение логарифмов, получим сумму 25,8638, причём ручаться можем только за то, что истинное значение этой суммы больше чем 25,8628 и меньше чем 25,8648. Если же взять восьмизначные логарифмы тех же 20 чисел и опять произвести сложение, то получим сумму 25,86389705. Как видим, истинная погрешность первой суммы не достигает даже одной десятитысячной и составляет, таким образом, примерно десятую часть своей теоретической границы.

Такое расхождение между истинной и наибольшей возможной погрешностями объясняется, прежде всего, тем, что при разыскании этой наибольшей возможной погрешности мы всегда предполагаем самое неблагоприятное стечение обстоятельств. Так, в только что разобранном примере мы считаем границей погрешности каждого слагаемого пол-единицы разряда последней его цифры. Между тем истинные погрешности этих слагаемых могут принимать, и на самом деле принимают, всевозможные значения от $-0{,}5$ до $+0{,}5$ единицы этого разряда. Далее, положительные погрешности, встречаясь примерно одинаково часто с отрицательными, в более или менее значительной степени их уравновешивают, процесс накопления погрешностей идёт параллельно процессу взаимной их компенсации, и в результате вероятность того, что погрешность суммы примет большое, т. е. близкое к границе, значение, становится крайне малой. Конечно, подбирая слагаемые искусственно, можно получить погрешность суммы, как угодно близкую к границе. При отсутствии же такого искусственного подбора это становится весьма мало вероятным. Методами теории вероятностей можно установить, как часто должно встречаться то или иное значение погрешности суммы.

Результаты теоретического исследования подтверждаются и прямым опытом. Так, например, был проделан такой опыт. Было взято 440 сумм по 20 логарифмов каждая, сначала с 5, потом с 7 десятичными знаками, и определены разности этих сумм, т. е. приближённые значения погрешностей сумм пятизначных логарифмов. Нижеприведённые числа показывают довольно близкое согласие результатов опыта и тех чисел, какие даются теорией.

Погрешность суммы лежит между	По теории	Число случаев в действительности
0 и 100	56,14%	65%
100 и 200	31,72%	28%
200 и 300	10,13%	6%
300 и 400	1,82%	1%
400 и 500	0,18%	0%
500 и 1000	0,01%	0%

Погрешности здесь выражены в десятимиллионных долях (в единицах разряда последней цифры семизначных логарифмов). Граница абсолютной погрешности суммы 20 слагаемых, имеющих каждое пять точных десятичных знаков, равна $0{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot 20$ или 1000 десятимиллионных, но эта граница далеко не достигнута во всех 440 случаях.

В практических вычислениях нельзя не считаться с этой малой вероятностью больших, т. е. близких к предельным, погрешностей.

Строгий учёт погрешностей результатов вычислений, требующий, как мы видели в §§ 8 и 9, немалой дополнительной работы, применяется на практике очень редко. Обыкновенно вычислители довольствуются тем, что ведут вычисление с определённым числом цифр (значащих цифр или десятичных знаков), сохраняя в результатах одну, иногда две сомнительные цифры (см. например, конец статьи [6]).

Иногда выставляют требование, чтобы употребляемые на практике приближённые числа имели погрешности, не превосходящие единицы разряда последней сохраняемой цифры. Вот, например, что говорит об этом акад. А. Н. Крылов в своей книге [10]:

«Результат всякого вычисления и измерения выражается числом; условимся писать эти числа так, чтобы по самому их начертанию можно было судить о степени точности; для этого стоит только принять за правило писать число так, чтобы в нём все значащие цифры, кроме последней, были верны, и лишь последняя цифра была бы сомнительна и притом не более как на одну единицу».

Если понимать это требование буквально, то оно весьма трудно исполнимо. Действительно, чтобы его соблюсти, необходим, во-первых, постоянный строгий учёт погрешностей, и, во-вторых, на каждом почти шагу приходилось бы сильно округлять результаты. Например, четырёхзначные логарифмы, полученные в результате сложения трёх четырёхзначных же логарифмов, имеют границу погрешности в $1\frac{1}{2}$ единицы разряда последней цифры, а потому, придерживаясь этого правила, их пришлось бы округлить до трёх десятичных знаков. Однако стоит только добавить в вышеприведённом правиле одно лишь слово «в среднем», и мы получаем основной важности принцип, который позволяет рационально обосновать целый ряд практических правил вычисления с приближёнными числами. Этот «основной принцип обыкновенных вычислений», т. е. вычислений без строгого учёта погрешностей, формулируем в окончательном виде так:

Принцип А. Н. Крылова. *Приближённое число надо писать так, чтобы в нём все значащие цифры, кроме последней, были верны и лишь последняя цифра была бы сомнительна и притом «в среднем» не более как на одну единицу.*

Это добавление «в среднем» мы будем понимать в том смысле, что здесь речь идёт не о границе погрешности, а о средней квадратической погрешности, т. е. о корне квадратном из среднего значения квадрата погрешности.

Чтобы яснее её себе представить, решим такую задачу:

Найти среднюю квадратическую погрешность округления, состоящего в отбрасывании одной только цифры, считая все возможные значения этой цифры равновероятными, т. е. встречающимися (при большом числе округлений) одинаково часто. Следовательно, равновероятны следующие значения погрешности округления (в единицах разряда последней цифры): $-0{,}5$; $-0{,}4$; $-0{,}3$; $-0{,}2$; $-0{,}1$; $0{,}0$; $0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$; $0{,}4$; $0{,}5$.

Всего здесь 11 значений погрешностей. Возьмём их квадраты, найдём сумму этих квадратов, разделим сумму на 11 и извлечём из частного квадратный корень. Это и даст искомую среднюю квадратическую погрешность округления, равную

$$\sqrt{\frac{2}{11}(0{,}25+0{,}16+0{,}09+0{,}04+0{,}01)}=$$

$$=\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}55}{11}}=\sqrt{0{,}1}\approx 0{,}316.$$

Если округление состоит в отбрасывании не одной, а двух цифр, то будем иметь уже не 11, а 101 значение погрешности (от $-0{,}50$ до $+0{,}50$), и средняя квадратическая погрешность округления оказывается равной 0,292. При её вычислении, во избежание сложения длинного ряда чисел, можно воспользоваться формулой

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Если, наконец, округление состоит в отбрасывании бесконечной последовательности цифр, то, как показывает расчёт, основанный на переходе к пределу или на применении интегрального исчисления, средняя квадратическая погрешность округления оказывается равной числу $\sqrt{3}:6=0{,}289$.

Чтобы использовать принцип А. Н. Крылова в приведённой выше второй его формулировке для вывода правил действий над приближёнными числами, надо найти средние квадратические погрешности результатов отдельных действий. Покажем, как вычисляется средняя квадратическая погрешность суммы n приближённых слагаемых, каждое из которых является результатом округления некоторого точного числа до k-го десятичного знака.

Пусть дано приближённое значение a, имеющее k точных десятичных знаков; будем его рассматривать как результат округления числа x_i, имеющего $m>k$ десятичных знаков, причём возможны всего $10^{m-k}+1=p$ различных значений x_i, которые можно считать равновероятными. Если, например, $a=74{,}62$; $k=2$; $m=5$, то

$p=1001$; $x_1=74{,}61500$; $x_2=74{,}61501$; $x_3=74{,}61502$; ...; $x_{1000}=74{,}62499$; $x_{1001}=74{,}62500$. Истинная абсолютная погрешность этого значения a, равная x_i-a, имеет, таким образом, всего p равновероятных значений от $x_1-a=-0{,}500\cdot10^{-k}$ до $x_p-a=+0{,}500\cdot10^{-k}$, причём

$$\sum_{i=1}^{p}(x_i-a)=0, \qquad \frac{\sum\limits_{i=1}^{p}(x_i-a)^2}{p}=\sigma_a^2.$$

Символ σ_a означает здесь среднюю квадратическую погрешность числа a, причём при $k=2$, $m=5$, как легко видеть,

$$\sigma_a=\sqrt{\frac{2\cdot\frac{1}{6}\cdot500\cdot501\cdot1001+1}{1001}}\cdot10^{-5}\approx0{,}289\cdot10^{-3}.$$

При $m\to\infty$

$$\sigma_a\to\frac{1}{6}\sqrt{3}\cdot10^{-k}.$$

Одновременно рассматриваем второе приближённое число b, совершенно независимое от первого, тоже имеющее k точных десятичных знаков и тоже являющееся результатом округления точного числа y_j, имеющего $m>k$ десятичных знаков; возможны всего $10^{m-k}+1=p$ значений y_j, которые опять-таки считаем равновероятными. Как и в первом случае,

$$\sum_{j=1}^{p}(y_j-b)=0, \qquad \frac{\sum\limits_{j=1}^{p}(y_j-b)^2}{p}=\sigma_b^2,$$

причём $\sigma_b=\sigma_a$.

Берём сумму $c=a+b$, представляющую собой приближённое значение точной суммы $z_{ij}=x_i+y_j$, способной принимать любое из p^2 возможных и равновероятных значений (любое из p возможных значений x_i комбинируется с любым из p возможных значений y_j). Имея

$$(z_{ij}-c)^2=[(x_i-a)+(y_j-b)]^2=$$
$$=(x_i-a)^2+(y_j-b)^2+2(x_i-a)(y_j-b),$$

сначала фиксируем j и берём p таких равенств для значений i от 1 до p. Получив равенство

$$\sum_{i=1}^{p}(z_{ij}-c)^2=\sum_{i=1}^{p}(x_i-a)^2+p(y_j-b)^2+2(y_j-b)\sum_{i=1}^{b}(x_i-a),$$

в котором третье слагаемое равно нулю, суммируем все такие равенства по значку j, принимающему p значений (от 1 до p), и получаем:

$$\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}(z_{ij}-c)^2=p\sum_{i=1}^{p}(x_i-a)^2+p\sum_{j=1}^{p}(y_j-b)^2.$$

После почленного деления на p^2 приходим к равенству

$$\sigma_c^2=\sigma_a^2+\sigma_b^2,$$

говорящему, что при сделанных предположениях *квадрат средней квадратической погрешности суммы равен сумме квадратов средних квадратических погрешностей слагаемых.*

Это заключение сразу обобщается на любое число слагаемых (как легко видеть, оно сохраняет силу и при более общих предположениях, чем сделано выше). Рассматривая сумму n слагаемых, удовлетворяющих указанным выше требованиям, имеем:

$$\sigma_s^2=\sigma_a^2+\sigma_b^2+\ldots+\sigma_n^2,\quad \sigma_a=\sigma_b=\ldots=\sigma_n,\quad \sigma_s^2=n\sigma_a^2,$$

$$\sigma_s=\sigma_a\sqrt{n}.$$

Итак, *средняя квадратическая погрешность суммы равноточных слагаемых пропорциональна корню квадратному из их числа.* Отсюда следует, что средняя квадратическая погрешность суммы n приближённых слагаемых, каждое из которых есть результат округления некоторого точного числа до k-го десятичного знака, равна $\frac{1}{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{n}\cdot 10^{-k}$ или приближённо $0{,}289\sqrt{n}\cdot 10^{-k}$.

Возвращаясь к принципу акад. А. Н. Крылова, пишем неравенство $\frac{1}{6}\sqrt{3}\cdot\sqrt{n}\leqslant 1$, которое даёт: $n\leqslant 12$.

Итак, имея не более 12 приближённых слагаемых, полученных посредством округления до одного и того же десятичного знака, можно сохранять все десятичные знаки суммы. На практике часто превосходят это число 12. Описанный выше опыт со сложением логарифмов показывает, что и при $n=20$ стоит сохранять все знаки суммы.

Любопытно сопоставить соответствующие значения предельной погрешности ε и средней квадратической погрешности суммы для разных n. Приводим табличку для n от 2 до 12, выражая ε и σ в единицах разряда k-го десятичного знака.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ε	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
σ	0,409	0,501	0,578	0,647	0,708	0,765	0,818	0,867	0,915	0,960	1,000

Изложенный вывод значения σ для суммы n слагаемых существенно упрощается, если использовать простейшие теоремы о вероятностях и применить интегральное исчисление. Не вызывает тогда затруднений и вычисление средних квадратических погрешностей результатов других действий. Ограничимся приведением таблицы, в которой сопоставлены значения предельных погрешностей и средних квадратических погрешностей.

Результат действия	ε	σ	ε_1
Алгебраическая сумма n слагаемых	$0{,}5n$	$0{,}289\sqrt{n}$	$0{,}5n$
Произведение двух k-значных приближённых чисел	5,5	0,626	6
Произведение k-значного приближённого числа на точное	5	0,442	5,5
Произведение k-значного приближённого на $(k+1)$-значное приближённое	5,05	0,445	5,55
Частное от деления k-значного приближённого на k-значное приближённое	10	0,576	10,5
Частное от деления k-значного приближённого на точное	5	0,151	5,5
Частное от деления k-значного приближённого на $(k+1)$-значное приближённое	5,5	0,391	6
Частное от деления точного на k-значное приближённое	5,22	0,425	5,72
Частное от деления $(k+1)$-значного приближённого на k-значное приближённое	5,5	0,427	6
Квадрат k-значного приближённого числа	3,5	0,705	4
Куб k-значного приближённого числа	7,13	1,059	7,63
Квадратный корень из k-значного приближённого числа	0,81	0,221	1,31
Кубический корень из k-значного приближённого числа	0,79	0,185	1,29

Все числа, приведённые в столбцах ε, σ, ε_1, выражены в единицах разряда k-й значащей цифры, кроме чисел первой строки, выраженных в единицах разряда k-го десятичного знака.

Сопоставление значений предельной погрешности (ε) и средней квадратической погрешности (σ) подтверждает целесообразность указанных в § 10 правил подсчёта цифр, показывая, что они удовлетворяют принципу акад. А. Н. Крылова. Числа столбца ε_1 получены путём прибавления 0,5 к соответствующим числам столбца ε и показывают, какого значения может достигнуть погрешность после отбрасывания всех цифр, следующих за k-й значащей.

§ 12. Распределение погрешностей в результатах вычислений

Сопоставление предельных и средних квадратических погрешностей, выполненное в таблице § 11, с полной определённостью говорит о *малой вероятности больших погрешностей* (т. е. погрешностей, близких к предельным): если, например, в произведении двух k-значных приближённых чисел предельная погрещность 5,5, а средняя квадратическая только 0,626 (единицы разряда k-й значащей цифры), то в подавляющем большинстве случаев фактическая погрешность должна быть очень небольшой и лишь в редких случаях приближаться к предельной. Естественно, возникает желание установить более точно картину распределения погрешностей, т. е. выяснить, как часто встречаются погрешности, заключённые в определённых интервалах.

Решение этой задачи требует несколько углублённых сведений по теории вероятностей, и мы ограничимся ссылками на книгу акад. Крылова [10], где эта задача решена для суммы (стр. 195—204). Применяя формулы, приведённые у акад. Крылова, к сумме 20 слагаемых, полученных округлением до одного и того же десятичного знака произвольных точных чисел, получаем результаты, указанные выше (на стр. 406): погрешность, не превосходящая одной единицы разряда этого десятичного знака, получается в 56,14% всех случаев, погрешность от одной до двух единиц — в 31,72% всех случаев, от двух до трёх единиц — в 10,13%, от трёх до четырёх единиц — в 1,82%, от четырёх до пяти единиц — в 0,18%, а от пяти до 10 единиц — только в 0,01% всех случаев, т. е. в среднем один раз на 10 000 случаев сложения; погрешность, превосходящая 10, здесь невозможна. Рассматривая произведение двух k-значных приближённых чисел, полученных посредством округления до k-й значащей цифры произвольных точных чисел: имеем результат с погрешностью, не превосходящей одной единицы разряда k-й значащей цифры, в 91,51% всех случаев, с погрешностью от одной до двух единиц — в 5,87%, от двух до трёх единиц — в 2,09%, от трёх до четырёх единиц — в 0,47%, от четырёх до пяти с половиной единиц — в 0,06% всех случаев; погрешность в 5,5% — предельная.

Нетрудно поставить опыт, подтверждающий правильность расчёта. Согласие между опытом и теорией тем больше, чем больше рассмотрено случаев умножения. При коллективной работе группы в 20—30 человек проведение такого опыта займёт всего 15—20 минут. Пусть каждый участник возьмёт несколько пар совершенно произвольных трёхзначных чисел и перемножит числа каждой пары, а затем округлит взятые числа до двух значащих цифр и вновь перемножит эти уже округлённые числа каждой пары. Поставив знаки дробности во взятых числах так, чтобы произведения содержали по две цифры левее запятой, находим разности произведений неокруглённых и округлённых чисел каждой пары. Например, берём числа 492 и 927, произведение которых 456 084, и после их округления до двух значащих цифр получаем числа 49 и 93, произведение которых 4557. Поставив в каждом сомножителе запятую после первой цифры, имеем: $4{,}92 \cdot 9{,}27 = 45{,}6084$ и $4{,}9 \cdot 9{,}3 = 45{,}57$. Здесь разница между произведениями точных и приближённых сомножителей составляет 0,0384 (единицы разряда второй значащей цифры).

Когда все эти операции выполнены, останется подсчитать число случаев, в которых разница заключается в границах от 0 до 1, от 1 до 2, от 2 до 3, от 3 до 4, от 4 до 5, от 5 до 5,5 и установить, сколько процентов от общего числа всех взятых пар составляют соответствующие числа.

Вот результаты одного подобного опыта, проведённого над 200 парами взятых наудачу пятизначных чисел, округляемых в ходе опыта до трёх значащих цифр каждая. Погрешности произведений округлённых чисел заключались между 0 и 1 (разряда третьей значащей цифры) в 186 случаях, т. е. в 93% всего числа испытаний (по теории должно быть $91{,}51\%$), между 1 и 2 — в 10 случаях, т. е. в 5% всего числа испытаний (по теории $5{,}87\%$), между 2 и 3 — в трёх случаях, т. е. в $1{,}5\%$ всего числа испытаний (по теории $2{,}09\%$), между 3 и 4 — в одном только случае, т. е. в $0{,}5\%$ всего числа испытаний (по теории $0{,}47\%$). Погрешность, превосходящая 4, не встретилась ни разу (теория для интервала от 4 до 5,5 даёт $0{,}06\%$).

Таким образом, теоретические исследования распределения погрешностей в сумме и произведении удовлетворительно согласуются с опытом. Подобное же положение имеет место и с частными, квадратами, кубами, квадратными и кубическими корнями. Правила подсчёта цифр I, II, III получают новое подтверждение. Следуя им, нельзя гарантировать точности последней цифры результата, но в большинстве случаев погрешность в этой цифре столь незначительна, что было бы неразумно вовсе её отбрасывать; вместе с тем неразумно было бы сохранять больше цифр, чем рекомендуют правила.

Само собой разумеется, что в случаях особо ответственных вычислений, когда нужна абсолютная надёжность результата, правила подсчёта цифр неприменимы: здесь необходим строгий учёт погрешностей по способу границ или по способу границ погрешностей. Но в обычных вычислениях, когда строгий учёт погрешностей не проводится, правила подсчёта цифр дают надёжные указания о рациональном округлении всех получаемых результатов.

§ 13. Практические применения правил подсчёта цифр. Сводка этих правил

Правила I—IV, рассмотренные в § 10, говорят о том, как надо округлять результаты отдельных действий над приближёнными числами. Такое округление иногда понижает имеющуюся в неокруглённом результате погрешность, иногда повышает её.

Пусть, например, даны числа $x = 33{,}1$ и $y = 2{,}52$ и найдено их произведение $xy = 83{,}412$. Округляя их до двух значащих цифр, имеем: $a = 33$ и $b = 2{,}5$; произведение этих приближённых двузначных чисел равно 82,5 и отличается от точного своего значения на разность $83,412 - 82,5 = 0,912$. Но после округления приближённого произведения согласно правилу II до двух значащих цифр, а именно, после замены его числом 82, эта разница увеличивается до $83,412 - 82 = 1,412$. Таким образом, в данном случае фактическая погрешность результата вследствие его округления по правилу II подсчёта цифр повышается. Но если, например, взять произведение $1,41 \cdot 1,73 = 2,4393$, считая сомножители приближениями до трёх значащих цифр к точным значениям $\sqrt{2} = 1,41421\ldots$ и $\sqrt{3} = 1,73205\ldots$, и округлить его согласно правилу II, то окажется, что это округлённое произведение 2,44 отличается от точного произведения $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} = 2,44948\ldots$ несколько меньше, чем неокруглённое. Детальное исследование показывает, однако, что вообще округление у х у д ш а е т точность, и если бы дело было только в точности, — приближённые результаты лучше было бы вовсе не округлять. Но для вычислительной практики громадное значение имеет и п р о с т о т а результатов: отказ от округлений влечёт за собой необходимость иметь дело с числами, имеющими очень много, сплошь и рядом даже бесконечно много цифр, и вычисление становилось бы крайне трудным или даже вовсе невыполнимым.

Как можно показать, это неблагоприятное влияние округлений становится почти неощутимым, если соблюдать следующее правило:

П р а в и л о V п о д с ч ё т а ц и ф р. *Во всех промежуточных результатах* (т. е. в тех, которые служат данными для последующих действий в той же задаче) *следует сохранять не столько цифр, сколько рекомендуют правила* I—IV, *а одной больше.*

Соблюдая это правило, такую лишнюю («запасную») цифру лучше как-нибудь отмечать, например писать её в уменьшенном размере; в последнем (окончательном) результате она отбрасывается. Сохранение вместо одной двух и более запасных цифр оправдано лишь в случае особо сложных вычислений, в громадном же большинстве обычных вычислений оно бесполезно для точности окончательного результата и вредно сказывается на общем объёме работы.

Аналогичное положение имеет место в случае, когда данные имеют различное число цифр (десятичных знаков при сложении и вычитании, значащих цифр при других действиях):

П р а в и л о VI п о д с ч ё т а ц и ф р. *Более точные данные рекомендуется предварительно округлять, сохраняя в них лишь по одной лишней (запасной) цифре сравнительно с менее точными данными.*

Сохранение более чем одной лишней цифры бесполезно для точности, что доказывается сравнением значений средней квадратической погрешности результата (см. таблицу на стр. 411), и вредно из-за усложнения работы, а отказ от лишней цифры снижает точность.

Решим с применением правил подсчёта цифр задачу, решённую на стр. 395—396, со строгим учётом погрешностей. Требуется найти $t=\sqrt{a:b}$, $a=2hd$, $b=g(d-d_1)$, зная, что $h\approx 25{,}3$, $d\approx 19{,}32$, $d_1\approx 0{,}998$, $g\approx 982$.

Приводим полностью всё вычисление:

$2h$	50,6
$a=2hd$	$977{,}_6$
$d-d_1$	$18{,}32_2$
$b=g(d-d_1)$	179_{90}
$a:b$	$0{,}0543_0$
$t=\sqrt{a:b}$	0,233

Ответ: $t\approx 0{,}233$

$$\begin{array}{r} 19{,}32 \\ 50{,}6 \\ \hline 11\,592 \\ 966\,0 \\ \hline 977{,}592 \\ \hline 977{,}_6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\,19{,}32 \\ 0{,}998 \\ \hline 18{,}322 \\ \hline 18{,}32_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 18{,}322 \\ 982 \\ \hline 36\,644 \\ 146\,576 \\ 164\,898 \\ \hline 17992{,}204 \\ \hline 179_{90}\phantom{{,}204} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 977{,}6 : 17990 \\ 9776\ : 179900 = 0{,}054302\ldots \approx 0{,}0543_0 \\ 8995 \\ \hline \ 7810 \\ \ 7196 \\ \hline \ \ 6140 \\ \ \ 5097 \\ \hline \ \ \ 4300 \end{array}$$

$\sqrt{0{,}05430}\approx 0{,}2330$ (по таблице).

Полученный ответ находится в полном согласии с тем, что дало вычисление по способу границ (см. стр. 396, где было найдено $t\approx 0{,}2331\ (\pm 0{,}0007)$).

Решим ещё задачу, решённую на стр. 390 по способу границ: найти $\delta=\frac{p}{v}$, $v=\pi r^2 h$, если $2r\approx 0{,}048$ *см*, $h=26{,}44$ *см*, $p\approx$ $\approx 0{,}423$ *г*. На стр. 377—378 отмечались те затруднения, какие неизбежно встают на пути решения этой простой задачи, если игнорировать особенности производства действий над приближёнными числами.

Здесь мы имеем данные $2r$, h, p с двумя, четырьмя, тремя значащими цифрами. С каким числом цифр взять $\pi=3{,}14159\ldots$? Замечая, что придётся выполнять только действия умножения и деления, применяем правило VI и ограничиваемся значением $\pi=3{,}14$. Ниже приведены полностью все выкладки, нужные для решения задачи.

$2r$	0,048
r	0,024
r^2	0,00576
π	3,14
πr^2	$0{,}0180_9$
h	26,44
$v=\pi r^2 h$	$0{,}478_3$
p	0,423
$\delta=\frac{p}{v}$	0,88

$$\begin{array}{r} 0{,}00576\cdot 3{,}14 \\ \hline 2304 \\ 576 \\ 1728 \\ \hline 0{,}0180864 \\ \hline 0{,}0180_9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}01809\cdot 26{,}44 \\ \hline 7236 \\ 7236 \\ 10854 \\ 3618 \\ \hline 0{,}4782996 \\ \hline 0{,}478_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0{,}423 : 0{,}4783 \\ 4230\ : 4783 = 0{,}884\ldots \\ \hline 42300 \\ 38264 \\ \hline \ 40360 \\ \ 38264 \\ \hline \ \ 20960 \\ \ \ 19132 \\ \hline \ \ \ 1828 \end{array}$$

Ответ: $\delta\approx 0{,}88$.

Опять получили полное согласие с тем, что дал способ границ. Однако надо иметь в виду, что применение способа границ (как в этой задаче, так и всегда) даёт совершенно определённое указание на наибольшую возможную ошибку результата, а правила подсчёта цифр, приводя к тому же самому числовому результату, обеспечивают лишь высокую вероятность того, что погрешность последней сохранённой цифры результата невелика. Если такая неполная определённость результата представляется недопустимой, то необходим строгий учёт погрешностей, но и в таких случаях применение правил подсчёта цифр полезно, так как позволяет сделать первоначальную ориентировку в вопросе об ожидаемом числе заслуживающих доверия цифр результата и указывает, с каким числом цифр следует вести всё вычисление.

Рассмотрим ещё один пример вычисления, подтверждающий целесообразность правила округления промежуточных результатов (правило V).

При решении уравнения $f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 3x - 7 = 0$ найден до сотых долей один из его корней, а именно, $x_1 \approx -3{,}71$, и требуется с целью проверки найти $f(x_1)$.

Проведём вычисление (с применением правил подсчёта цифр) три раза: без запасной цифры, с одной запасной цифрой, с двумя запасными цифрами.

x	$-3{,}71$	$-3{,}71$	$-3{,}71$
x^2	$13{,}8$	$13{,}7_{6}$	$13{,}7_{64}$
x^3	$-51{,}1$	$-51{,}0_{6}$	$-51{,}0_{64}$
$2x^3$	-102	$102{,}_{1}$	$-102{,}_{13}$
$-5x^2$	$-69{,}0$	$-68{,}8_{0}$	$-68{,}8_{20}$
$3x$	$-11{,}1$	$-11{,}1_{3}$	$-11{,}1_{30}$
-7	$-7{,}0$	$-7{,}00$	$-7{,}000$
$2x^3 - 5x^2 + 3x - 7$	-189	$-189{,}_{0}$	$-189{,}_{08}$
x^4	190	$189{,}_{2}$	$189{,}_{45}$
$f(x)$	$+1$	$+0{,}_{2}$	$+0{,}_{37}$
То же по отбрасывании запасных цифр	$+1$	0	0

Как видим, сохранение одной запасной цифры несколько изменило окончательный результат. Вторая же запасная цифра никакого нового изменения этого результата не вызвала.

Остаётся указать ещё на один случай употребления запасных цифр — на вычисления с наперёд заданной точностью. Если данные можно брать с более или менее произвольным числом цифр, а точность результата наперёд указана, то, взяв данные с таким числом цифр, какое даст согласно правилам I — IV требуемое число цифр в результате, т. е. взяв эти данные, так сказать, «в обрез», мы никогда не можем ручаться за точность последней цифры результата: правила подсчёта цифр говорят только то, что значительная погрешность в этой последней цифре гораздо менее вероятна, чем малая. Эта сомнительность последней цифры исчезает, если взять в приближённых данных по одной запасной цифре. Большее число запасных цифр, как оказывается, выигрыша точности уже не даёт, доставляя лишь добавочную вычислительную работу (конечно, в случае особо сложного вычисления лучше брать две запасные цифры).

Правило VII подсчёта цифр. *Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с k цифрами данные следует брать с таким числом цифр, какое даёт согласно правилам* I—IV $k+1$ *цифру в результате.*

Вот пример вычисления с наперёд назначенной точностью. Пользуясь бесконечным рядом

$$\lg(1+x)=M\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\ldots\right),$$

где $M=0{,}43429448\ldots$, $-1<x\leqslant+1$, найти четырёхзначный логарифм числа 7.

Взять $x=6$, чтобы сразу получить $\lg 7$, невозможно, так как ряд сходится и может быть использован для целей вычисления лишь при значениях x, меньших (по абсолютному значению) единицы. Поэтому найдём сначала $\lg 0{,}7$, для чего возьмём $x=-0{,}3$. Вычисление будем вести с одним запасным десятичным знаком, т. е. с пятью $(4+1=5)$ десятичными знаками, и возьмём все члены ряда, не обращающиеся в нуль при округлении до пяти десятичных знаков:

x	$-0{,}30000$
x^2	$0{,}09000$
x^3	$-0{,}02700$
$x^4=(x^2)^2$	$0{,}00810$
$x^5=x^2\cdot x^3$	$-0{,}00243$
$x^6=(x^3)^2$	$0{,}00073$
$x^7=x^3\cdot x^4$	$-0{,}00022$
$x^8=(x^4)^2$	$0{,}00007$
$x^9=x^4\cdot x^5$	$-0{,}00002$
$x^{10}=(x^5)^2$	$0{,}00001$
M	$0{,}43429$

x	$-0{,}30000$
$-x^2:2$	$-0{,}04500$
$x^3:3$	$-0{,}00900$
$-x^4:4$	$-0{,}00202$
$x^5:5$	$-0{,}00049$
$-x^6:6$	$-0{,}00012$
$x^7:7$	$-0{,}00003$
$-x^8:8$	$-0{,}00001$
$x^9:9$	$-0{,}00000$
S	$-0{,}35667$
MS	$-0{,}15490$

Итак, по отбрасывании запасной цифры $\lg 0{,}7=-0{,}1549$, откуда

$$\lg 7=\lg(0{,}7\cdot 10)=-0{,}1549+1=0{,}8451.$$

Именно это значение $\lg 7$ мы и находим в таблице четырёхзначных логарифмов. Напомним, что, желая провести то же вычисление со строгим учётом погрешностей, мы должны были бы принять во внимание ещё и остаточный член ряда.

Особого упоминания требует явление «потери точности при вычитании»: при вычитании двух близких друг к другу приближённых чисел, имеющих поровну десятичных знаков, в разности получается столько же десятичных знаков, число же значащих цифр получается меньшее, чем было в каждом компоненте. Поэтому, желая получить такую разность с определённым числом значащих цифр, мы должны вычислить компоненты с числом знаков, значительно бóльшим.

Пусть, например, требуется получить значение $x = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}{(\operatorname{arc}\alpha)^3}$ при $\alpha = 5^\circ$ с тремя значащими цифрами (символом $\operatorname{arc}\alpha$ здесь обозначена радианная мера дуги α).

Для получения частного с тремя значащими цифрами делимое и делитель надо взять согласно правилу VII подсчёта цифр с четырьмя значащими цифрами. Чтобы получить разность $\operatorname{tg} 5^\circ - \sin 5^\circ = 0{,}0875 - 0{,}0872$ с четырьмя значащими цифрами, значения $\operatorname{tg} 5^\circ$ и $\sin 5^\circ$ надо взять не с четырьмя десятичными знаками, как мы сейчас их взяли, а с семью. Значение $\operatorname{arc} 5^\circ$ достаточно взять с пятью десятичными знаками.

Вычисление понятно из приводимой схемы.

$\operatorname{arc} 5^\circ$	0,08727
$\operatorname{tg} 5^\circ$ $\sin 5^\circ$	0,0874887 0,0871557
$a = \operatorname{tg} 5^\circ - \sin 5^\circ$ $b = (\operatorname{arc} 5^\circ)^3$	0,0003330 0,0006646
$x = \frac{a}{b}$	0,501

В настоящем случае тот же результат можно получить гораздо легче, если предварительно преобразовать числитель данного выражения к виду, удобному для логарифмирования, и воспользоваться таблицей четырёхзначных логарифмов. Тогда

$$x = \frac{\sin 5^\circ (1 - \cos 5^\circ)}{\cos 5^\circ \cdot (\operatorname{arc} 5^\circ)^3} = \frac{2 \operatorname{tg} 5^\circ \sin^2 2^\circ 30'}{(\operatorname{arc} 5^\circ)^3} = \frac{2 \operatorname{tg} 5^\circ \sin^2 2^\circ 30'}{(\pi : 36)^3} \text{ и } x \approx 0{,}5012$$

или по округлении до трёх десятичных знаков $x \approx 0{,}501$.

Необходимо указать ещё на одно правило, позволяющее судить о точности результата логарифмического вычисления. Вычисляя с помощью логарифмов одночленное выражение, содержащее только точные компоненты, получают результат с вычислительной погрешностью, тем меньшей, чем больше десятичных знаков имеют использованные табличные мантиссы. Причина появления погрешности понятна: все табличные мантиссы логарифмов, кроме логарифмов чисел 1, 10, 100 и т. д., — числа приближённые. Как показывает опыт и подтверждает теоретическое исследование, вычислительная погрешность, вносимая в результат вследствие применения таблицы k-значных логарифмов, делает не вполне надёжной k-ю значащую его цифру. Вычислим, например, значение $x = 70:19$, пользуясь таблицами 3-, 4-, 5-, 7-, 12-значных логарифмов[1]).

k	3	4	5	7	12
lg 70	1,845	1,8451	1,84510	1,8450980	1,845098040014
lg 19	1,279	1,2788	1,27875	1,2787536	1,278753600953
lg x	0,566	0,5663	0,56635	0,5663444	0,566344439061
x	3,68	3,684	3,6842	3,684210	3,68421052632

Сравнение с точным значением

$$x = 70:19 = 3{,}684210526315789473 68\ldots,$$

представляющим собой периодическую дробь с периодом из 18 цифр, показывает, что все цифры полученных приближённых результатов точны. Но можно привести сколько угодно примеров вычислений посредством k-значных логарифмов, когда полученный результат отличается от точного на 1—2 единицы k-го разряда. Так, вычисление частного $17:6 = 2{,}833\ldots$ посредством четырёхзначных логарифмов даёт 2,832, а вычисление числа $3{,}9^3 = 59{,}319$ посредством пятизначных логарифмов даёт 59,317.

Чтобы получить с помощью логарифмов результат с k точными значащими цифрами, надо взять таблицу $(k+1)$-значных логарифмов. Это соображение приводит к правилу VIII подсчёта цифр, указанному ниже. Соблюдая его, устраняют опасность снизить из-за применения логарифмов точность результата, достижимую при данной точности компонентов, а также опасность без нужды осложнить вычислительную работу применением логарифмов с числом десятичных знаков, слишком большим при этой их точности.

Вот сводка из восьми рассмотренных правил.

I. *При сложении и вычитании приближённых чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближённом данном с наименьшим числом десятичных знаков.*

Примечание. «Десятичными знаками» числа называются те цифры, которые расположены справа от знака дробности.

II. *При умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближённое данное с наименьшим числом значащих цифр.*

---

[1]) Двенадцатизначные логарифмы взяты по книге: М. Ф. Субботин, Многозначные таблицы логарифмов, Издательство Академии наук СССР, 1940.

Примечание. «Значащими цифрами» числа называются все его цифры, кроме нулей, расположенных левее первой отличной от нуля его цифры.

III. *При возведении в квадрат и куб в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближённое число.*

Примечание. Последняя цифра квадрата и особенно куба при этом менее надёжна, чем последняя цифра основания.

IV. *При извлечении квадратного и кубического корней в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет подкоренное число* (приближённое).

Примечание. Последняя цифра квадратного и особенно кубического корня при этом более надёжна, чем последняя цифра подкоренного числа.

V. *При вычислении промежуточных результатов следует брать одной цифрой более, чем рекомендуют предыдущие правила.*

Примечание. В окончательном результате эта «запасная цифра» отбрасывается. Писать её рекомендуется в уменьшенном размере.

VI. *Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков* (при действиях I ступени) *или больше значащих цифр* (при действиях II и III ступеней), *чем другие, то их предварительно следует округлять, сохраняя лишь одну лишнюю цифру.*

VII. *Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с k цифрами данные следует брать с таким числом цифр, какое даёт согласно правилам* I — IV $k+1$ *цифру в результате.*

VIII. *При вычислении значения одночленного выражения посредством логарифмов следует подсчитать число значащих цифр в приближённом данном, имеющем наименьшее число значащих цифр, и взять таблицу логарифмов с числом десятичных знаков на* 1 *бóльшим. В окончательном результате последняя значащая цифра отбрасывается.*

Примечание. При применении всех правил подсчёта цифр следует избегать нулей, помещаемых в конце приближённых чисел взамен неизвестных цифр.

ГЛАВА III

РАЗЛИЧНЫЕ ВОПРОСЫ

§ 14. Приближённые формулы. Сокращённые приёмы действий

В практических вычислениях широко используются некоторые приближённые формулы, обоснование которых вполне доступно учащимся старших классов средней школы. Так, легко проверяется тождество

$$\frac{1}{1+x}=1-x+\frac{x^2}{1+x},$$

показывающее, что в случаях, когда число x настолько мало, что при принятой точности вычисления его квадратом можно пренебречь, допустима замена выражения $1:(1+x)$ разностью $1-x$.

Замечая, что корни уравнения

$$\frac{x^2}{1+x}=0{,}005$$

суть 0,0733 и $-0{,}0683$, убеждаемся, что эта замена вносит погрешность, не превосходящую половины единицы разряда второго десятичного знака (половины сотой), если x находится в интервале от $-0{,}0683$ до 0,0733, т. е. если x по абсолютному значению не превосходит 0,074. Точно так же устанавливаем, что погрешность приближённой формулы $1:(1+x)\approx 1-x$ не превосходит $0{,}5\cdot 10^{-3}$, если $|x|<0{,}022$, и $0{,}5\cdot 10^{-4}$, если $|x|<0{,}0074$. Применяя эту формулу, например, для получения частного $1:0{,}997$, когда $x=-0{,}003$, имеем $1-x=1+0{,}003$, и уверенно пишем: $1:0{,}997\approx 1{,}0030$ (непосредственное деление даёт 1,0030090 ...). Применение приближённой формулы $1:(1+x)\approx 1-x$, как видим, существенно облегчает выполнение действия деления; что ещё важнее, — эта формула позволяет легко учесть то изменение частного, какое получается при небольшом изменении делителя: если число Δb весьма мало по сравнению с b, то

$$\frac{a}{b+\Delta b}=\frac{a}{b\left(1+\frac{\Delta b}{b}\right)}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1+\frac{\Delta b}{b}}\approx\frac{a}{b}\left(1-\frac{\Delta b}{b}\right),$$

$$\frac{a}{b+\Delta b}-\frac{a}{b}=-\frac{a}{b}\cdot\frac{\Delta b}{b}.$$

Пренебрегая числом x^2, получаем приближённую формулу

$$(1+x)^2\approx 1+2x,$$

а заменив в этой формуле $2x$ через y и извлекая из каждой части квадратный корень, приходим к новой приближённой формуле

$$\sqrt{1+y}\approx 1+0{,}5y.$$

Приводим список простейших приближённых формул, особенно часто используемых в вычислительной практике, указывая те наибольшие значения аргумента x, при которых погрешность формулы не превышает $0{,}5\cdot 10^{-k}$ для $k=2$, 3, 4. Эти наибольшие значения устанавливаются проще всего путём непосредственного вычисления левой и правой частей при ряде возрастающих значений аргумента (с применением таблиц).

	Формула	$k=2$	$k=3$	$k=4$
I	$(1+x)(1+y)\approx 1+x+y$ $\quad\lvert x\rvert\geqslant\lvert y\rvert$	0,07	0,022	0,007
II	$(1+x)(1+y)(1+z)\approx 1+x+y+z$ $\quad\lvert x\rvert\geqslant\lvert y\rvert\geqslant\lvert z\rvert$	0,04	0,012	0,004
III	$(1+x)^2\approx 1+2x$	0,07	0,022	0,007
IV	$(1+x)^3\approx 1+3x$	0,04	0,012	0,004
V	$\frac{1}{1+x}\approx 1-x$	0,07	0,022	0,007
VI	$\frac{1}{1+x}\approx 1-x+x^2$	0,18	0,081	0,037
VII	$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x$	0,21	0,064	0,020
VIII	$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$	0,46	0,20	0,09
IX	$\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{1}{3}x$	0,22	0,068	0,021

	Формула	$k=2$	$k=3$	$k=4$
X	$\sqrt[3]{1+x} \approx 1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2$	0,47	0,21	0,09
XI	$\sin x \approx x$	17°	8°,2	3°,8
XII	$\sin x \approx x-\frac{1}{6}x^3$	51°	32°	20°
XIII	$\cos x \approx 1$	5°,7	1°,8	0°,5
XIV	$\cos x \approx 1-\frac{1}{2}x^2$	33°	18°	10°
XV	$\operatorname{tg} x \approx x$	14°	6°,4	3°,0
XVI	$\operatorname{tg} x \approx x+\frac{1}{3}x^3$	29°	18°	11°
XVII	$\lg(1+x) \approx 0{,}4343x$	0,15	0,048	0,015
XVIII	$\ln(1+x) \approx x$	0,10	0,031	0,010
XIX	$e^x \approx 1+x$	0,09	0,031	0,010
XX	$10^x \approx 1+2{,}303x$	0,04	0,014	0,004
XXI	$\lg\frac{1+x}{1-x} \approx 0{,}8686x$	0,25	0,119	0,055
XXII	$\ln\frac{1+x}{1-x} \approx 2x$	0,19	0,090	0,042

Здесь lg означает десятичный логарифм, ln — натуральный логарифм; в тригонометрических формулах x выражен в радианной мере.

Приближённые формулы существенно облегчают работу вычисления во многих частных случаях. Эту же цель преследуют так называемые «сокращённые приёмы» производства действий умножения, деления, извлечения квадратного корня, применимые почти всегда, особенно когда данные числа — приближённые. Относительно значения этих приёмов для школы имеются весьма различные мнения. Например, проф. В. Л. Гончаров в своей книге [5] уделяет этим приёмам много внимания. Но если учесть, что эти приёмы, указанные очень давно, никакого распространения в школе не получили, хотя рекомендовались чуть не в каждой книге для учителя, посвящённой вычислительной работе, то представляется более правильным другой взгляд, согласно которому эти приёмы имеют лишь второстепенное значение по сравнению со счётными приборами и таблицами. Как бы то ни было, учителю полезно быть знакомым с ними.

Положим, требуется найти первые четыре значащие цифры произведения 29,97 · 2,738. Ниже это умножение выполнено обычным способом (слева) и «сокращённым» способом (справа).

$$\begin{array}{r}
29{,}97 \cdot 2{,}738 \\
\hline
23976 \\
8991 \\
20979 \\
5994 \\
\hline
82{,}05786 \\
\hline
82{,}06
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
29{,}97 \cdot 2{,}738 \\
8372 \\
\hline
5994 \\
2098 \\
90 \\
24 \\
\hline
82{,}06
\end{array}$$

Цифры множителя подписываются под цифрами множимого в обратном порядке, причём, раз требуется получить четыре значащие цифры произведения, то цифра старшего разряда множителя подписывается под четвёртой (считая слева направо) значащей цифрой множимого. Каждое частное произведение получается путём умножения (на соответствующую цифру множителя) лишь тех цифр множимого, которые выше и левее этой цифры множителя. Так, на 2 умножается число 2997, на 7 — только 299, на 3 — уже лишь 29 и на 8 — только 2. На отбрасываемые цифры множимого берётся приближённая поправка. Например, при получении второго частного произведения замечаем, прежде всего, что отбрасываемая цифра 7 при умножении на 7 даёт около 5 десятков. Запоминая эту поправку 5, умножаем 9 на 7 и к произведению 63 прибавляем 5. Получив 68, записываем 8 под крайней правой цифрой первого частного произведения, цифру же 6 запоминаем. Получение остальных цифр частного произведения идёт обычным порядком.

Для определения положения знака дробности можно дать особое правило, но проще произвести грубо приближённую оценку произведения. В данном случае, получив в произведении цифры 8206 и замечая, что сомножители близки к 30 и 3, видим, что произведением может быть только число 82,06, а никак не 8,206 или 820,6.

Записывая сомножитель так, как указано выше, мы получим либо как раз столько цифр, сколько требуется, либо одной больше. В последнем случае эту лишнюю цифру отбрасываем.

Объяснение этого приёма не представляет затруднений. Надо только сопоставить частные произведения при полном и сокращённом умножении. Погрешность результата сокращённого умножения (при точных сомножителях) не превосходит пол-единицы последнего разряда произведения, умноженной на число цифр множителя.

Переходя к сокращённому делению, рассмотрим такой пример: требуется найти четыре первые значащие цифры частного от деления 81,3747 на 0,377264. Ниже сопоставлено это деление, выполненное обычным способом (слева) и «сокращённым» (справа).

$$\begin{array}{r:ll}
81{,}37 & 4700 : 0{,}377264 & = 215{,}6\ldots \\
75{,}45 & 28 & = 215{,}7 \\ \cline{1-2}
5921 & 90 & \\
3772 & 64 & \\ \cline{1-2}
2149 & 260 & \\
1886 & 320 & \\ \cline{1-2}
262 & 9400 & \\
226 & 3584 & \\ \cline{1-2}
36 & 58160 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
813747 : 377264 = 215{,}7 \\
7545 \\ \hline
592 \\
377 \\ \hline
215 \\
189 \\ \hline
26 \\
26 \\ \hline
0
\end{array}$$

Здесь тоже можно устранить из вычисления все цифры правее вертикальной черты. Для этого отделяем в делителе столько цифр, сколько их требуется в частном, т. е. в данном случае четыре значащие цифры, и начинаем деление обычным способом, не обращая внимания на знаки дробности в делимом и в делителе, с той лишь разницей, что после получения каждой цифры частного отбрасываем по одной (последней) цифре делителя, а последующих цифр делимого не сносим.

Разделив 8137 на 3772, получаем первую цифру частного 2. Умножив 2 на 3772 с поправкой на отброшенные цифры делителя, получаем произведение 7545 и первый остаток 592. Теперь отбрасываем последнюю цифру делителя и делим 592 уже только на 377. Получаем вторую цифру частного 1, умножаем её на 377 и находим второй остаток 215. Делим его на 37, получаем третью цифру частного 5, произведение которой на 37 с поправкой на отброшенные цифры делителя есть 189. Это даёт третий остаток 26. Остаётся разделить 26 на 3. Если возьмём в частном 8, то произведение 8 на 3 с поправкой на отброшенные цифры делителя даёт 30 и остаток — 4. Если же взять в частном не 8, а 7, то произведение 7 на 3 (с поправкой) даёт как раз 26.

Итак, цифровой состав частного установлен; остаётся выяснить положение знака дробности. Берём грубо приближённые значения делимого и делителя и замечаем, что частное должно быть близким к $80:0{,}4=200$. Поэтому ставим запятую после третьей значащей цифры и получаем окончательно в частном 215,7.

Правило сокращённого деления становится вполне понятным, если сопоставить шаг за шагом весь процесс полного и сокращённого деления.

Остаётся рассмотреть сокращённый способ извлечения квадратного корня. Он основан на следующей теореме:

Теорема. ***Если по вычислении n значащих цифр корня остаток от извлечения разделить на удвоенное найденное значение корня, то частное даёт $n-1$ следующих цифр корня.***

Для доказательства предположим, что подкоренное b имеет целую часть из n граней. Пусть найдено n первых цифр корня, образующих собой число a, и надо найти дробную часть корня, которую обозначим буквой x. Таким образом,

$$\sqrt{b}=a+x, \quad b=a^2+2ax+x^2, \quad \frac{b-a^2}{2a}=x+\frac{x^2}{2a}.$$

Разность $b-a^2$ есть не что иное, как остаток, получаемый после разыскания n цифр корня, а дробь $\frac{b-a^2}{2a}$ представляет собой то самое частное, о котором говорится в тексте теоремы. Отсюда заключаем, что

$$x = \frac{b - a^2}{2a} - \frac{x^2}{2a}.$$

Принимая $x \approx \frac{b - a^2}{2a}$, мы допускаем погрешность, равную $\frac{x^2}{2a}$. Но $x < 1$, $a \geqslant 10^{n-1}$, а потому

$$\frac{x^2}{2a} < 0,5 \cdot 10^{-(n-1)}.$$

Если, выполняя деление $b - a^2$ на $2a$, мы остановимся, найдя $n - 1$ десятичный знак частного, и округлим его, как обычно, то к вышенайденной погрешности прибавится ещё погрешность от округления, и полная погрешность приближённого значения корня в самом неблагоприятном случае может приблизиться к целой единице разряда $(n - 1)$-го десятичного знака, но никогда не достигнет этого предельного значения.

Если знак дробности в подкоренном числе стоит не там, где мы его предполагали, его всегда можно перенести на надлежащее место, производя умножение (или деление) подкоренного числа на некоторую степень 10 с чётным показателем, с тем, чтобы потом разделить (или умножить) найденный корень на степень 10 с показателем, вдвое меньшим. На практике делать это преобразование не нужно.

Рассмотрим пример. Положим, требуется найти $\sqrt{10}$ с 7 значащими цифрами. Обычным способом найдём первые четыре цифры; деление остатка на удвоенный корень даст следующие 3. Для сравнения помещаем рядом (справа) запись процесса получения всех семи цифр обычным способом:

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{\sqrt{10} = 3,162277} \\
\multicolumn{2}{c}{9} \\
\hline
61 & 100 \\
1 & 61 \\
\hline
626 & 3900 \\
6 & 3756 \\
\hline
6322 & 14400 \\
2 & 12644 \\
\hline
\multicolumn{2}{r}{1756 : 6324} \\
\multicolumn{2}{r}{1265 } \\
\multicolumn{2}{r}{491 } \\
\multicolumn{2}{r}{443 } \\
\multicolumn{2}{r}{48 } \\
\multicolumn{2}{r}{44 } \\
\multicolumn{2}{r}{4 }
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{\sqrt{10} = 3,162277\ldots} \\
\multicolumn{2}{c}{9} \\
\hline
61 & 100 \\
1 & 61 \\
\hline
626 & 3900 \\
6 & 3756 \\
\hline
6322 & 14400 \\
2 & 12644 \\
\hline
63242 & 175600 \\
2 & 126484 \\
\hline
632447 & 4911600 \\
7 & 4427129 \\
\hline
6324547 & 48447100 \\
7 & 44271829 \\
\hline
 & 4175271
\end{array}$$

Остаток 1756 мы считали целым и делили его на удвоенное найденное число, тоже считая его целым, а полученные цифры частного просто приписали к найденной ранее части корня. В самом деле, остаток у нас равен $1756 \cdot 10^{-6}$, удвоенное найденное число $6324 \cdot 10^{-3}$, частное $0{,}277 \cdot 10^{-3}$, и оно записано у нас на надлежащем месте.

§ 15. Математические таблицы

Из разнообразнейших существующих вспомогательных средств вычисления наибольшее значение по своей распространённости, простоте и удобству имеют в настоящее время математические таблицы.

В вычислительной практике постоянно употребляются разного рода математические таблицы, представляющие собой прекрасное вспомогательное средство вычислений, чрезвычайно простое по своему устройству и употреблению, вполне общедоступное по своей дешевизне, в высокой степени гарантирующее от ошибок, доставляющее громадную экономию времени и сил.

Наибольшее распространение имеют таблицы, дающие зависимость между двумя переменными величинами (из них одна является аргументом, другая — функцией). Таковы, например, таблицы логарифмов, квадратов, кубов и т. д. Таблицы, дающие зависимость между тремя переменными («таблицы функций двух аргументов»), а тем более между бо́льшим числом их, встречаются гораздо реже; примером таблицы функции двух аргументов может служить любая таблица произведений.

Более глубокое изучение вопросов, связанных с устройством и употреблением математических таблиц, выполняется с помощью особой математической дисциплины — ветви математического анализа — «исчисления конечных разностей». Начальные сведения о таблицах, вполне доступные учащимся старших классов средней школы, приведены в «Объяснениях...», имеющихся в 19-м (существенно переработанном по сравнению с предыдущими) издании «Четырёхзначных математических таблиц» В. Брадиса (1948). Более подробные сведения можно найти в книгах [2а] и [2б]. В книге [5] можно найти подробные указания об интересных и поучительных упражнениях, которые желательно ввести в школьный курс математики в связи с построением таблиц.

В школе наиболее привились таблицы логарифмов чисел и логарифмов тригонометрических функций. Отметим, что для большинства задач достаточно применять четырёхзначные таблицы, позволяющие получать результаты с четырьмя значащими цифрами (последняя не вполне надёжна). Приобретая полную беглость в обращении с таблицами четырёхзначных логарифмов, школьник должен быть ознакомлен и с употреблением более полных таблиц, желательно семизначных, так как иногда (правда, в школьной практике очень редко) встречаются задачи, требующие вычисления с повышенной точностью.

Кроме таблиц логарифмов, существует много других таблиц, введение которых в постоянное школьное употребление надо всемерно рекомендовать. Таковы, прежде всего, таблицы квадратов и квадратных корней, которые могут быть использованы в школе ранее других таблиц и дают ощутительную экономию времени (ведь возводить числа в квадрат и извлекать из чисел квадратные корни приходится так часто!). Заметим, что при наличии более или менее полной таблицы квадратов надобность в особой таблице квадратных корней отпадает. То же самое следует сказать о таблице кубов и кубических корней. Весьма полезны таблицы значений тригонометрических функций, которые делают во многих случаях излишним приведение к логарифмическому виду и позволяют решать треугольники в VIII классе, когда логарифмы ещё не известны. Большое применение может иметь таблица обратных значений чисел и таблица для перевода градусной меры в радианную.

Маленькую табличку произведений, содержащую произведения некоторого определённого числа на целые числа первого десятка, выгодно составлять самому всякий раз, когда это число неоднократно фигурирует как сомножитель или делитель. Такая табличка быстро получается последовательным прибавлением взятого числа, причём прибавление это следует вести до получения 10-кратного значения, что даёт хороший контроль правильности всей таблички. Таблицы длины окружности, перевода градусов в радианы и некоторые другие представляют собой не что иное, как более подробные таблицы произведений (чисел π, $\pi : 180$ и др.).

Наибольшее затруднение при пользовании любой таблицей доставляет «интерполяция», т. е. процесс получения значения функции для таких значений аргумента, какие заключаются между двумя последовательными табличными его значениями, а также обратный процесс. Это «чтение между строками таблицы» обычно производится на основе предположения о равномерности изменения функции в промежутке между двумя табличными её значениями. Обыкновенная «линейная» интерполяция допустима лишь в том случае, когда последовательные табличные значения функции, соответствующие равноотстоящим значениям аргумента, имеют равные или очень медленно изменяющиеся разности («табличные разности»). Только ясное понимание существа линейной интерполяции и условия её допустимости обеспечивают сознательное, а не механическое использование таких весьма полезных и широко используемых вспомогательных средств линейной интерполяции, как «пропорциональные части» (*PP*) и «готовые поправки». Необходимо добиваться, чтобы учащиеся умели не только пользоваться такими готовыми поправками, но и сами умели их составить, что вполне достижимо даже на основании тех кратких указаний, какие приведены в «Объяснениях...».

§ 16. Графические вычисления

В тех случаях, когда достаточна точность в 2—3 значащие цифры, **вычисление** результата очень часто бывает возможно заменить его **построением** или даже простым **отсчётом** по готовому чертежу. Такие графические способы решения вычислительных задач, в десятки и даже сотни раз сокращающие работу вычислителя, получили в настоящее время самое широкое применение во всех отраслях техники, особенно в тех случаях, когда скорость получения числовых результатов имеет первостепенное значение. Средняя школа существенно облегчила бы труд своих выпускников, направляющихся в вузы и военные, а также военно-морские учебные заведения, по части усвоения применяемых там графических методов, если бы культивировала простейшие приёмы графических вычислений, вполне доступные даже учащимся семилетней школы. Однако с методической стороны графические вычисления в школе разработаны очень мало, и надеяться на сколько-нибудь широкое и планомерное их внедрение в среднюю школу в ближайшем же времени не приходится. Можно только настойчиво рекомендовать каждому преподавателю относительно всякой вычислительной задачи ставить вопрос о возможности упрощённого её решения графическим способом и о той выгоде, какую способ этот представляет сравнительно с обычным вычислением. Особенно подчёркиваем последнее обстоятельство — необходимость выяснения преимуществ графического решения в каждом отдельном случае. Графически решать можно любую вычислительную задачу, но иногда такое решение доставляет выигрыш, иногда нет. Решая графическим способом задачу, которая проще решается обычным вычислительным путём, мы только скомпрометируем графический способ в глазах учащихся.

Особенно бросаются в глаза выгоды графического способа в так называемых «массовых» вычислениях, когда приходится по одной и той же формуле производить вычисление много раз, пользуясь различными значениями входящих в формулу величин. Рассмотрим один простой пример.

Положим имеется ряд чисел 18, 23, 38, 57, 85, 92, представляющих собой цены в рублях разных товаров, причём требуется каждое из них уменьшить на 27%. Вычислительное решение сводится к умножению каждого из данных чисел на 0,73 и при наличии таблицы произведений или подходящего счётного прибора выполняется сразу. Но очень просто выполнимо и графическое решение, сводящееся к построению на куске клетчатой (лучше миллиметровой) бумаги прямоугольного треугольника с катетами 100 *мм* и 73 *мм* (рис. 7) и к ряду отсчётов, дающих такие сниженные цены: 13; 17; 28; 42; 62; 67 (таблица произведений даёт точные их значения 13,14; 16,79; 27,74; 41,61; 62,05; 67,16).

Миллиметровая бумага обеспечивает удобный графический способ решения задач, относящихся к линейным функциям $y = ax + b$. Выпускаемая в продажу «логарифмическая бумага» позволяет столь же просто решать задачи, относящиеся к степенным функциям вида $y = ax^{\alpha}$, где a и α — любые действительные числа, так как на такой бумаге график этой функции есть прямая линия. Применяя «полулогарифмическую бумагу», получаем возможность изображать прямыми линиями

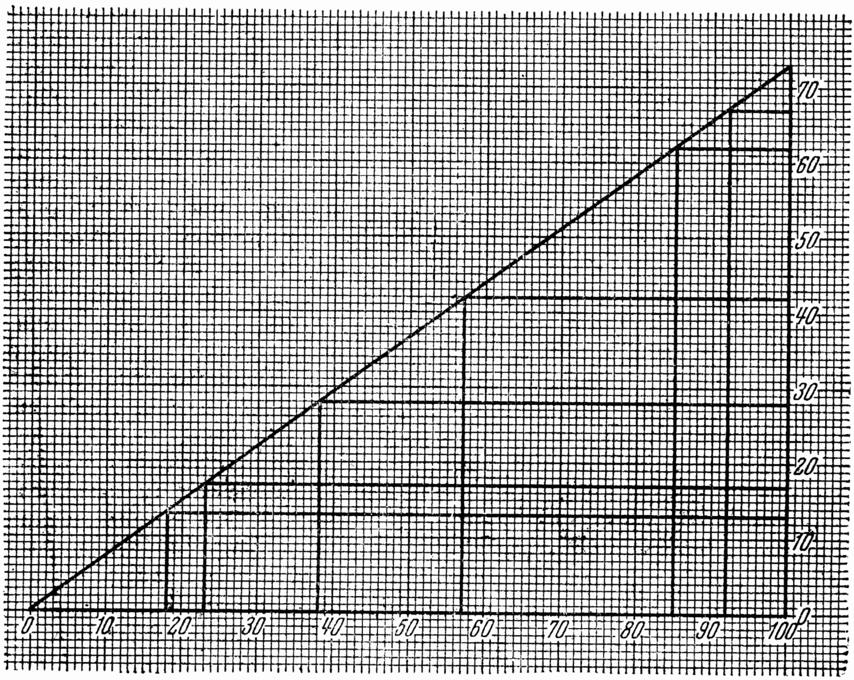

Рис. 7.

показательные и логарифмические функции $y = ab^x$ и $y = a \lg x + b$ (детали можно найти в книге [26]).

Стремление облегчить производство такого рода массовых вычислений привело к созданию целой новой отрасли математики — номографии, которой посвящён ряд книг [1]). Для первого ознакомления рекомендуем книгу [13]; некоторые немногие примеры, особенно пригодные для использования в школе, можно найти

[1]) О применении номографии к приближённому решению уравнений см. Э. э. м., кн. 2, А. П. Доморяд, Численные и графические методы решения уравнений.

в книге [26]. Желающих ознакомиться с номографией основательнее отсылаем к книге [14].

Решая одну и ту же задачу и вычислительным и графическим способами, мы приучаем учащихся к хорошему самоконтролю, так как применение графического способа легко обнаруживает грубые просчёты. С графического решения, дающего, вообще говоря, менее точные результаты, чем вычислительный, рекомендуется начинать, чтобы знание более точного значения искомого результата не толкало невольно на «подгонку» получаемого с графика менее точного результата. Так и сделано выше в § 3 при решении геометрической задачи (см. стр. 364).

§ 17. Счётная логарифмическая линейка

Несомненно, самая настоятельная задача средней школы по части рационализации вычислительной работы заключается в настоящее время в освоении теории и практики счётной логарифмической линейки. Этот простой по устройству, небольшой по размерам и в силу этого портативный, вполне общедоступный по цене счётный прибор позволяет с очень большой скоростью получать произведения, частные, степени, корни, значения логарифмов, значения тригонометрических функций, а также результаты вычисления по более сложным формулам. Счётная линейка нормальной длины, т. е. имеющая шкалы длиной в 250 *мм*, доставляет результаты с тремя значащими цифрами, а в случаях, когда число имеет первой значащей цифрой единицу, — даже четыре. Делать сложение и вычитание линейка не помогает, поэтому желательно комбинировать её со счётами. Она даёт результаты быстрее, чем арифмометр, причём выигрыш в скорости особенно значителен при массовых вычислениях. Так, например, вычисление значений $s = 4{,}9\,t^2$ для ряда значений t, хотя бы для значений t от 3 до 7 через 0,5, выполняется на линейке в течение 30—40 секунд и даёт такие результаты:

$t=$	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
$s=$	44,1	60,0	78,4	99,2	122,4	148,0	176,4	207	240.

Если работают двое, причём один манипулирует с линейкой, а другой записывает под диктовку первого полученные результаты, работа ускоряется ещё примерно на 30%.

Линейка даёт, как уже отмечено, ограниченную точность результатов, и это, естественно, делает её непригодной, например, для финансовых вычислений, где сплошь и рядом приходится иметь дело с числами, содержащими по 6, 7, 8 и больше цифр, причём вычисление ведётся с точностью до копеек, как бы велика ни была сумма. Другое дело — технические вычисления, где в подавляющем большинстве случаев интерес представляют только первые три значащие цифры результата, нередко даже лишь две. Здесь эта ограниченная точность доставляемых линейкой результатов даже выгодна, так как все (или почти все) подлежащие отбрасыванию (как не заслуживающие доверия) цифры сами собой, механически, отпадают. Естественно, что линейка получила в настоящее время самое широкое распространение. Без неё у нас не обходится ни один инженер, ни один техник, ни один студент технического вуза, по крайней мере при работе над дипломным проектом.

Средняя школа не даёт в настоящее время никаких сведений о линейке, хотя был период, когда изучение её устройства и употребления предусматривалось обязательной программой. Неудача попытки введения линейки в школу была обусловлена тем, что, во-первых, школа не была снабжена достаточно дешёвыми и удовлетворительными по качеству счётными линейками и, во-вторых, тем, что большинство учителей математики обращаться с линейкой не умеют: в педвузах изучению линейки до последнего времени никакого внимания не уделялось. Первая причина с течением времени постепенно отпадает: в магазинах всё чаще появляются удовлетворительные по качеству недорогие линейки. Тем более досадной является вторая причина. В тех случаях, когда учитель, хорошо владеющий приёмами работы с линейкой и правильно оценивающий её значение, предлагает желающим заниматься изучением линейки в порядке дополнительной (хотя бы кружковой) работы, обычно подбирается группа учащихся, имеющих свои собственные линейки и успешно приобретающих прочные навыки в её использовании.

Существует большое число руководств, излагающих теорию логарифмической линейки и указывающих пути скорейшего овладения соответствующими навыками; главы, посвящённые линейке, имеются и в большинстве книг по технике вычислений вообще. Приводим начало главы «Счётная логарифмическая линейка» из книги автора [2a], разъясняя тем самым основную идею этого прибора и сообщая сведения, необходимые для первых шагов работы с ним.

Если взять две обыкновенные миллиметровые линейки длиной, например, по 30 *см* каждая, то без труда получим прибор для механического производства сложения и вычитания целых чисел не выше 300 при условии, что и результат не превосходит этой границы. В самом деле, расположив линейки так, чтобы их кромки со штрихами совпали, изменим нумерацию штрихов верхней линейки, написав 0 вместо 30, 1 вместо 29 и т. д. Мы получим теперь две совпадающие миллиметровые шкалы, изображённые на рис 8, *А*. Хотя цифровые метки поставлены лишь около штрихов, означающих целые сантиметры, мы можем говорить о метке каждого штриха, каждой шкалы и даже о метке каждой точки, расположенной между двумя смежными штрихами. Так, метка длинного штриха, расположенного между штрихами с метками 2 и 3, есть 2,5, ближайшего справа 2,6, следующего 2,7. Метка точки, находящейся на середине расстояния между этими двумя штрихами, есть 2,65 и т д. Таким образом, метка каждой точки выражает в сантиметрах её расстояние от начала шкалы. Краткости ради вместо «точка с меткой a» будем говорить просто «метка a».

Сдвинув одну из двух полученных совпадающих шкал (положим, нижнюю) вправо так, чтобы её начало оказалось против, например, метки 2,8 верхней шкалы (рис. 8, *Б*), мы будем иметь против каждой метки a нижней шкалы метку $a+2{,}8$ верхней шкалы и выполним, следовательно, сложение 2,8 с любым числом (в пределах шкалы). Например, взяв метку 4,6 на нижней шкале, читаем на верхней шкале метку 7,4, дающую сумму $4{,}6+2{,}8$. Взяв метку 5,9 на нижней шкале, читаем на верхней шкале метку $8{,}7=5{,}9+2{,}8$ и т. д.

Если, далее, требуется вычесть, например, 3,7 из 8,2, достаточно найти метку 8,2 на верхней шкале и установить против неё метку 3,7

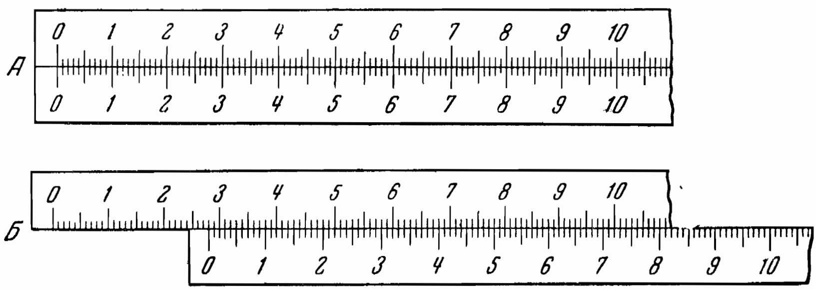

Рис. 8.

нижней шкалы. Начало нижней шкалы окажется при этом против метки 4,5 верхней шкалы, дающей разность $8{,}2-3{,}7$.

Таким образом, имеем следующие два правила: 1) чтобы найти сумму $c=a+b$, надо взять метку a на одной шкале, поставить против неё начало второй шкалы, взять на этой второй шкале метку b и прочесть противостоящую ей метку c первой шкалы; 2) чтобы найти разность $d=a-b$, надо взять метку a на одной шкале, поставить против неё метку b второй шкалы, перейти к началу этой второй шкалы, прочесть противостоящую метку первой шкалы.

Действия сложения и вычитания так просты сами по себе и так хорошо выполняются посредством конторских счётов, что только что рассмотренный прибор, который можно назвать счётной метрической линейкой, вряд ли может иметь какое-нибудь практическое значение. Однако развитие его основной идеи сопоставления двух шкал приводит к ряду других форм счётной линейки, из которых одна, носящая название «счётной логарифмической линейки», оказалась имеющей громадную практическую ценность и получила за последние десятилетия самое широкое распространение среди всех, кому приходится производить какие бы то ни было числовые расчёты.

В счётной метрической линейке сопоставляются две метрические шкалы, где расстояние каждой точки от начала шкалы пропорционально метке этой точки. Если, сохраняя метки штрихов, передвинуть самые штрихи по шкале так, чтобы расстояние каждого штриха от начала шкалы стало пропорциональным логарифму соответствующей метки (при некотором основании), то мы получим так называемую *логарифмическую шкалу*. Обозначая буквой a метку штриха, поставленного на расстоянии в $\bar{a}$ *мм* от начала шкалы, имеем формулу $\bar{a} = m \lg a$, которую называют «уравнением логарифмической шкалы» (здесь m — коэффициент пропорциональности, который будем именовать «модулем» данной шкалы). При любом m метка 1 находится в начале шкалы, так как $m \lg 1 = 0$, метка 10

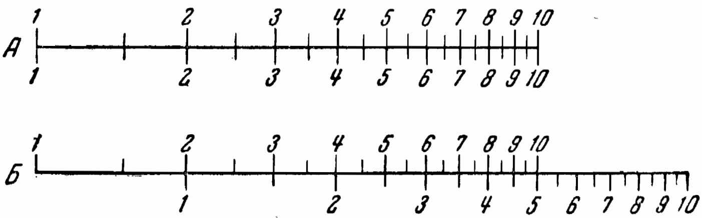

Рис. 9.

на расстоянии m *мм* от начала, метка 100 на расстоянии $2m$ *мм* от начала и т. д. Отрезок такой шкалы со штрихами, соответствующими значениям a от 1 до 10 при $m = 100$ показан на рис. 9, *А*.

При $m = 100$ *мм* штрих с меткой 1,5 находится на расстоянии $100 \lg 1{,}5 = 17{,}6$ *мм*, штрих с меткой 2 — на расстоянии $100 \lg 2 = 30{,}1$ *мм* от начала и т. д. Штрихи продолжены и вверх и вниз, чтобы, разрезав эту двойную шкалу по её оси, получить две тождественные логарифмические шкалы. Сдвигая одну из них относительно другой так, чтобы её начало, т. е. точка 1, оказалось, например, против метки 2 другой шкалы (рис. 9, *Б*), мы увидим, что против каждой метки a нижней шкалы теперь находится метка $b = 2a$ верхней шкалы. Мы таким образом выполнили умножение любого числа (в пределах шкалы) на 2.

Легко понять, почему это так. Если против метки a верхней шкалы поместить начало нижней, то против метки b нижней шкалы окажется какая-то метка c верхней (рис. 10). Отрезки $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, взятые от начала соответствующей шкалы до меток a, b, c, связаны соотношением $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$, а самые метки — соотношением $m \lg a + m \lg b = m \lg c$ или $\lg a + \lg b = \lg c$ или $ab = c$. Если же против метки a верхней шкалы поместить метку b нижней (рис. 10), то против начала нижней шкалы окажется метка c верхней, причём связь между отрезками выражается соотношением $\bar{a}-\bar{b}=\bar{c}$, а между метками — соотношением $m\lg a - m\lg b = m\lg c$ или $\frac{a}{b}=c$.

Теперь можно формулировать правила выполнения действий умножения и деления посредством пары тождественных логарифмических шкал, совершенно аналогичные правилам сложения и вычитания посредством пары метрических шкал, формулированных выше: 1) чтобы найти произведение $c=ab$, надо взять метку a на одной шкале, поставить против неё начало второй шкалы, взять на этой второй шкале метку b и прочесть противостоящую ей метку c первой шкалы; 2) чтобы найти частное $c=\frac{a}{b}$, надо взять метку a на одной шкале, поставить против неё метку b второй шкалы, перейти к началу этой второй шкалы, прочесть противостоящую метку c первой шкалы.

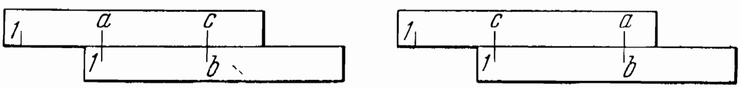

Рис. 10.

Как видим, эта пара логарифмических шкал представляет собой прибор, позволяющий механически производить умножение и деление с той же лёгкостью, с какой метрическая счётная линейка позволяет производить сложение и вычитание. Этот счётный прибор и есть логарифмическая счётная линейка.

Уяснив идею счётной логарифмической линейки, нетрудно разобраться во всех деталях устройства и употребления такой линейки фабричного изготовления. Она отличается от только что описанной самодельной, во-первых, тем, что её шкалы исполнены очень тщательно и содержат большое число штрихов, и, во-вторых, тем, что, кроме одной пары тождественных логарифмических шкал, она имеет ещё несколько шкал, позволяющих, кроме умножения и деления, выполнять ещё целый ряд математических операций: возведение в степень, извлечение корня, решение треугольников, разыскание логарифмов, антилогарифмов и т. д.

Счётные линейки изготовляются различных размеров (карманные длиной 125 и 250 *мм*, настольные длиной 500 *мм*, демонстрационные длиной до 2 *м* и другие) и различных систем как общего назначения, т. е. для выполнения действий умножения, деления и других, так и специального назначения — для электротехников, теплотехников, артиллеристов и т. д. Наибольшее распространение и значение имеют в настоящее время «нормальные» линейки с шестью или семью шкалами длиной в 250 *мм*. Такие линейки изготовляются у нас, в СССР, нескольких марок: «Прометей», «Металлометр» и др. Нормальные линейки позволяют находить результаты обычно с тремя, иногда с четырьмя значащими цифрами. В подавляющем большинстве технических расчётов эта точность вполне достаточна. При умелом пользовании линейка даёт огромный выигрыш и во времени, требуемом для выполнения вычисления, и в надёжности результатов, и в затрате сил. Естественно, что линейка завоевала себе столь широкое распространение: ни один инженер или техник, ни один студент технического вуза не могут в настоящее время обойтись без этого вспомогательного средства вычисления. Правда, работа на линейке предъявляет высокие требования к глазам: лицам со слабым зрением она не рекомендуется (простая близорукость, однако, ничуть не препятствует работе на линейке). Пользование линейкой при плохом освещении недопустимо.

В деле изучения линейки следует различать две ступени: первую, состоящую в овладении техникой производства действий умножения, деления, возведения в квадрат и куб, извлечения квадратного и кубического корней, решения пропорций, вычисления ряда значений, прямо или обратно пропорциональных данным, и вторую, включающую ряд более сложных операций, в том числе все тригонометрические вычисления. На полное освоение первой ступенью требуется от 15 до 20 часов работы, примерно столько же на вторую. Эта довольно значительная затрата времени быстро окупается той экономией, какую применение линейки даёт всякому вычислителю.

Вот цитата из книги «Мои воспоминания» Героя социалистического труда акад. А. Н. Крылова (Издательство Академии наук СССР, 1945, стр. 116):

«Приступив в 1892 году к чтению курса теории корабля . . . , я предпослал этому курсу основания о приближённых вычислениях вообще и в приложении к кораблю в частности, выставляя как принцип, что вычисление должно производиться с той степенью точности, которая необходима для практики, причём всякая неверная цифра составляет ошибку, а всякая лишняя цифра — половину ошибки. Насколько практика этого дела была несовершенна, я показал на ряде примеров, где 90% было таких лишних цифр, которые без ущерба для точности результата могли быть отброшены, а в одном вычислении, исполненном в чертёжной Морского технического комитета, такой напрасной работы было 97%. Затем долголетней практикой я убедился, что если какая-либо нелепость стала рутиной, то чем эта нелепость абсурднее, тем труднее её уничтожить».

Эти лишние цифры, каждая из которых, по выражению А. Н. Крылова, составляет половину ошибки, радикально устраняются постоянным применением правил подсчёта цифр, о которых была речь выше (§§ 10—13). Весьма действенным средством борьбы с этими лишними цифрами является широкое применение счётной линейки.

§ 18. Вычислительная работа в разные годы обучения

В объяснительной записке к ныне действующей программе математики средней школы РСФСР читаем: «Связь теории с практикой в процессе преподавания математики осуществляется, во-первых, путём выполнения упражнений, дающих некоторую подготовку к разрешению практических вопросов, и, во-вторых, путём выполнения самих практических работ, где находят применение математические знания учащихся. Эти работы и упражнения должны быть органически связаны с программным материалом и не должны нарушать системы математических знаний» (издание 1950 г., стр. 5).

Учитель, желающий серьёзно выполнить это в высшей степени важное требование программы, желающий научить решать математические задачи, действительно встречающиеся в сельском хозяйстве, в разных отраслях техники, в военном деле, задачи, примерный перечень которых приведён в объяснительной записке, встречается с двумя затруднениями. Первое заключается в том, что такие задачи, вообще говоря, требуют больших числовых выкладок, отнимающих много времени и не имеющих никакой образовательной ценности, коль скоро навык в рациональном выполнении этих выкладок уже приобретён. Второе затруднение обусловлено приближённым характером чисел, с которыми приходится иметь дело при решении таких «реальных» задач. Точные данные встречаются в них лишь в виде исключений, а приближённые данные приводят к приближённым же результатам. Неизбежен вопрос: чтó в этих результатах заслуживает доверия? Округления, производимые без надёжной опоры в виде того или иного способа строгого учёта погрешностей или в виде хотя бы правил подсчёта цифр, таят в себе опасность либо указывания чисел с заведомо неверными цифрами («очковтирательство» из-за создания иллюзии точности!), либо отбрасывания верных цифр, т. е. неоправданного снижения точности результатов. По многовековой традиции школьная математика игнорирует этот приближённый характер большинства числовых результатов, выражающий значения реальных величин, и в этом — одна из причин оторванности школьной математики от жизни.

Как устранить эти два затруднения? Необходима рационализация вычислительной работы школьников, состоящая, во-первых, в использовании различных способов и средств, облегчающих и ускоряющих выполнение арифметических операций над многозначными числами (устный счёт, улучшение техники письменного счёта, широкое использование счётных приборов, таблиц, графиков), и, во-вторых, в усвоении элементов теории приближённых вычислений. Радикальное улучшение существующего положения требует некоторой перестройки школьной программы, но и в рамках существующей программы возможно дать учащимся много ценных и прочных сознательных навыков.

Устным счётом и улучшением техники письменных вычислений необходимо заниматься уже в V классе, заботясь о сохранении и пополнении приобретённых навыков во все последующие годы. Вычисления на счётах рекомендуются программой для V класса, и следует очень сожалеть, что ими большинство учителей пренебрегает. Вычисления на счётах можно рассматривать как первый шаг в деле механизации счётной работы, существенно облегчающий выполнение действий сложения и вычитания многозначных чисел. Второй шаг в этом направлении представляет собой введение палочек Непера, в такой же мере облегчающих действия умножения и деления многозначных чисел. В действующей программе средней школы упоминания о палочках Непера, к сожалению, нет, и пока приходится рекомендовать работу по их изготовлению и применению как дополнительную и необязательную (особые задания для более сильных учащихся, кружковая работа). Следующий шаг, являющийся уже переходом от «малой механизации» счёта к «большой» его механизации — освоение арифмометра. Это — прекрасная тема для занятий в кружке, осуществимая, если учитель даст себе труд достать экземпляр арифмометра и сам научится на нём работать.

Ещё важнее введение в школе счётной логарифмической линейки, так естественно связываемое с курсом математики IX класса. В программе требования изучать линейку пока нет, но молодёжь на многочисленных примерах видит применение линейки работниками многих специальностей, легко достаёт линейки, охотно отзывается на приглашение работать в кружке по её изучению. Попав через пару лет во втуз, знающий линейку получает большое преимущество перед незнающими, да и в средней школе линейка экономит время на производство вычислений по математике и физике. Пожалуй, нет ни одной другой частной задачи в деле улучшения постановки преподавания математики, столь насущно важной и столь легко разрешимой, как прочное введение в школьный обиход счётной линейки.

Мало используются школой и математические таблицы. Будучи вспомогательным средством вычисления, таблица должна применяться всякий раз, когда основной способ выполнения того или другого действия усвоен, а встречающиеся задачи требуют многократного производства этого действия. Первыми таблицами, с которыми можно знакомить школьников, являются таблицы произведений. Уже маленькая самодельная табличка произведений (какого-либо числа на все однозначные) серьёзно помогает при выполнении умножения и деления. Далее, приходится рекомендовать таблицы квадратов и квадратных корней, которые найдут себе применение в VI и VII классах. Аналогичная таблица кубов, позволяющая находить и кубические корни, позволит поставить много хороших геометрических задач вполне реального содержания. Широкие возможности открывает также введение таблиц длины окружности, площади круга, радианной меры, обратных значений. Успешные занятия пропедевтикой тригонометрии в VIII классе немыслимы без использования таблиц натуральных синусов и тангенсов. Таблицам логарифмов чисел и таблицам логарифмо-тригонометрическим школа уделяет достаточно внимания и сейчас.

Крайне важно, чтобы с самого начала имело место не механическое, а вполне сознательное пользование таблицами. Надо дать понятие о том, как таблица составлялась; хорошо произвести перевычисление хотя бы некоторых табличных данных (при рациональном разделении труда эта работа получает характер проверки готовой печатной таблицы или некоторой её части). Необходимо добиться вполне сознательного выполнения операции интерполирования и только после этого научить пользоваться вспомогательными средствами линейной интерполяции (пропорциональными частями, готовыми поправками).

Не требует ли ознакомление с таблицами лишнего времени, которого учителю математики так часто нехватает? Со введением таблиц дело обстоит так же, как и со всяким видом рационализации какой бы то ни было работы: час-другой, какие приходится затратить на ознакомление с новой таблицей, с избытком окупаются благодаря доставляемой этой таблицей экономии времени и сил. Вычисление квадратного корня с четырьмя значащими цифрами, требующее при применении обычного способа письменного вычисления двух-трёх минут, производится при помощи четырёхзначной таблицы квадратов или квадратных корней в 10—15 секунд, да и ошибки при применении таблицы встречаются гораздо реже. А сколько таких вычислений может быть облегчено благодаря таблицам!

Часто рекомендуют прививать в школе так называемые «сокращённые» способы производства арифметических действий (см. выше, стр. 423). Позволительно сомневаться в целесообразности этого. Дело в том, что выгоды от их применения становятся ощутимыми только при данных, имеющих много цифр, но такие данные в задачах практического характера встречаются крайне редко. При вычислениях же с 2-, 3-, 4-значными числами способы сокращённого производства действий не выдерживают конкуренции с различными вспомогательными средствами вычисления (таблицы, счётные приборы, графики). Это отрицательное отношение к сокращённым способам отнюдь не следует распространять на приближённые формулы (см. выше, § 14) и на различные частные приёмы производства арифметических действий, о которых речь шла в § 2.

О недооценке в школе графических вычислений была уже речь выше (§ 16). Графические вычисления доступны буквально во всех классах, и в высшей степени полезно ставить вопрос о целесообразности их применения для каждой вычислительной задачи. Вот, например, задача, для решения которой выгодно использовать график, вычерченный на кусочке клетчатой бумаги: сколько процентов их общей суммы составляют такие-то данные числа? Не зная ещё главы о подобии фигур, легко понять возможность пропорционального изменения отрезков посредством параллельного переноса стороны треугольника.

Введение элементов теории приближённых вычислений можно рекомендовать осуществлять следующим образом. В V классе в связи с повторением мер неизбежно возникает и вопрос об измерениях. Естественно здесь же ввести и понятие приближённого значения как результата измерения, а также установить доступные школьникам приёмы обработки результатов измерений (см. выше, § 7). Дальше, естественно, появляются и простейшие правила подсчёта цифр (см. выше, § 10), целесообразность которых устанавливается доступным для пятиклассников образом на частных примерах с заменой неизвестных цифр знаками вопроса. Наибольшее значение здесь имеет просто понимание значения этих правил самим учителем и постоянство в требованиях их применения. Правила подсчёта цифр, неизбежно вытекающие из основного требования писать только заслуживающие доверия цифры («принцип академика А. Н. Крылова»), образуют первый, практически важнейший круг сведений по приближённым вычислениям.

Второй их круг образует простейший способ строгого учёта погрешностей — способ границ (см выше, § 8). По идейному своему содержанию этот способ доступен и в V классе, но лучше первое знакомство с ним отложить до VI класса, возвращаясь к нему в дальнейшем и уделяя ему особое внимание при изучении неравенств.

Третий круг сведений по приближённым вычислениям — способ границ абсолютных и относительных погрешностей. Его желательно отнести уже на VII год, притом ограничиваясь только понятием об этих границах. Оканчивающие семилетнюю школу должны понимать смысл таких выражений, как $134\ (\pm 1)$ *мм* или $5{,}4\ (\pm 2\%)$, и уметь выражать в такой форме результаты своих измерений (и своих вычислений, произведённых по способу границ). Знакомство же с теоремами о границах погрешностей результатов действий, не предусмотренное программой, но крайне желательное ввиду их приложений на занятиях в физической лаборатории, относится уже к старшим классам средней школы. Располагая этими теоремами, можно вернуться к правилам подсчёта цифр и дать новое их обоснование, пользуясь связью числа десятичных знаков с границей абсолютной погрешности, а числа значащих цифр — с границей относительной погрешности (см. выше стр. 405 и статью [6]). Если способ границ основательно усвоен, вывод теорем о границах абсолютных и относительных погрешностей проводится очень легко. Осложнение возникает лишь при отбрасывании «весьма малых чисел второго порядка малости», но если учащиеся уже знакомы с приближёнными формулами, то и этот пункт проходит благополучно.

Во всякой работе приходится различать планирование и исполнение. Доведение до конца любой математической задачи практического содержания требует более или менее значительных численных выкладок. Эта исполнительная часть математики находится в школьном курсе математики в настоящее время на третьем или ещё более удалённом плане, и это обстоятельство не может не придавать до известной степени формальный характер всему комплексу математических знаний и навыков, выносимых учащимися из средней школы.

Чтобы преодолеть этот недостаток, необходимо, чтобы сам учитель владел теорией и практикой вычислительной работы, хотя бы в том небольшом объёме, какой указан в предыдущем изложении.

Литература

1. Берман Г. Н., Приёмы быстрого счёта, Гостехиздат, 1947.
2. Брадис В. М., а) Средства и способы элементарных вычислений, Издательство Академии педагогических наук, 1948. б) Теория и практика вычислений, изд. 5-е, Учпедгиз, 1937.
3. Филиппов А. О., Четыре арифметических действия, Издательство «Матезис», 1909.
4. Чуканцов С. М., Больше внимания технике арифметических вычислений, Математика в школе, 1948, № 4.
5. Гончаров В. Л., Арифметические упражнения и функциональная пропедевтика, Издательство Академии педагогических наук, 1947.
6. Александров П. С. и Колмогоров А. Н., Свойства неравенств и понятие о приближённых вычислениях, Математика в школе, 1942, № 2.
7. Романовский В. И., Основные задачи теории ошибок, Гостехиздат, 1947.
8. Гнеденко Б. В. и Хинчин А. Я., Элементарное введение в теорию вероятностей, изд. 2-е, Гостехиздат, 1950.
9. Кавун И. Н, Приближённые вычисления, ГИЗ, 1923.
10. Крылов А. Н., Лекции о приближённых вычислениях, издание 5-е, Гостехиздат, 1950.
11. Безикович Я. С., Приближённые вычисления, изд. 5-е, Гостехиздат, 1941.
12. Франк М. Л., Элементарные приближённые вычисления, ГТТИ, 1932.
13. Глаголев А. А., Номография для школьника, ОНТИ, 1935.
14. Глаголев Н. А., Теоретические основы номографии, ОНТИ, НКТП, 1936.
15. Панов Д. Ю., Счётная линейка, изд. 6-е, Гостехиздат, 1949.
16. Семендяев К. А., Счётная линейка, Изд. 2-е, Гостехиздат, 1950.