О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ О ДОПУСКАХ

С.П.Шарый

В работе рассматривается так называемая линейная задача о допусках, требующая по интервальной системе линейных алгебраических уравнений $\mathbf{A}x=\mathbf{b}$ нахождения допустимого множества решений $X_*(\mathbf{A},\mathbf{b}) = \{x\in\mathbb{R}^n \mid (\forall A\in\mathbf{A})(Ax\in\mathbf{b})\}$. Предлагается простой достаточный признак неразрешимости линейной задачи о допусках, основанный на сравнении "относительной узости" элементов матрицы $\mathbf{A}$ и вектора правых частей $\mathbf{b}$.

ON COMPATIBILITY OF LINEAR TOLERANCE PROBLEM

Sergey P. Shary

This paper considers the so-called linear tolerance problem that requires for interval linear algebraic system $\mathbf{A}x=\mathbf{b}$ finding tolerable solution set $X_*=\{x\in\mathbb{R}^n \mid (\forall A\in\mathbf{A})(Ax\in\mathbf{b})\}$. Proposed is a simple unsolvability test based on comparison of "relative narrownesses" of the matrix $\mathbf{A}$ and right-hand sides vector $\mathbf{b}$ entries.

Пусть даны $\mathbf{A}$ – интервальная $m\times n$-матрица, $\mathbf{b}$ – интервальный n-вектор. Как известно, линейной задачей о допусках (ЛЗД) называется задача об оценивании изнутри так называемого допустимого множества решений

$$X_*(\mathbf{A},\mathbf{b}) = \{x\in\mathbb{R}^n \mid (\forall A\in\mathbf{A})(Ax\in\mathbf{b})\} ,$$

образованного всеми такими векторами $x\in\mathbb{R}^n$, что при любой матрице A из заданных пределов $\mathbf{A}$ произведение Ax всегда попадает в интервальный вектор $\mathbf{b}$. Иногда эту задачу называют также "внутренней задачей" для интервальной системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ).

В отличие от популярной "внешней задачи для ИСЛАУ", требующей покомпонентного оценивания объединённого множества решений $X^*(\mathbf{A},\mathbf{b})=\{x\in\mathbb{R}^n \mid (\exists A\in\mathbf{A})(\exists b\in\mathbf{b})(Ax=b)\}$, для задачи о допусках возможно, что $X_*(\mathbf{A},\mathbf{b}) = \emptyset$, даже если $\mathbf{A}$ – квадратная матрица, содержащая только неособенные вещественные матрицы. Например, это имеет место для одномерных данных $\mathbf{A} = [1;2]$, $\mathbf{b} = [2;3]$. В случае $X_*(\mathbf{A},\mathbf{b})=\varnothing$ говорят обычно о неразрешимости (несовместности) линейной задачи о допусках, т.к. её исходная формулировка становится тогда бессодержательной.

Впервые линейная задача о допусках была сформулирована западногерманскими математиками Е.Нудингом и Ю.Вильхельмом в работе [9], там же были указаны некоторые из возможных её содержательных применений. Тем не менее , в последующие несколько лет эта публикация не привлекала внимания специалистов. И.Рон обратился к задаче о допусках в [13,14] в связи с анализом линейных балансовых экономических моделей (интервального уравнения Леонтьева). В этих его работах указаны явные формулы, позволяющие выяснить разрешимость ЛЗД, но лишь для случая матрицы $\mathbf{A}$ специального вида и положительного вектора $\mathbf{b}$.

Первой советской публикацией, посвященной линейной задаче о допусках, была статья Н.А.Хлебалина [5], в которой рассмотрен синтез модального управления для САУ с интервальной неопределённостью. В [5], а также в [2,7,10], предлагается простой эвристический признак разрешимости ЛЗД : наиболее вероятным представителем допустимого множества решений $X_*(\mathbf{A},\mathbf{b})$ считается решение $\hat{x}$ "средней системы"

$$\mathrm{med}\,\mathbf{A}\cdot x = \mathrm{med}\,\mathbf{b}\ ,$$

где $\mathrm{med}\,\mathbf{A}$, $\mathrm{med}\,\mathbf{b}$ - вещественные матрица и вектор, образованные, соответственно, серединами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$. Если же $\mathbf{A}\cdot\hat{x} \not\subseteq \mathbf{b}$, то делается вывод о "практической неразрешимости" рассматриваемой ЛЗД. Ясно, что этот признак работает лишь когда матрица $\mathbf{A}$ "достаточно узка" в сравнении с вектором правых частей $\mathbf{b}$, и не способен улавливать пограничных случаев. Примеры его несостоятельности приведены в [8].

Достаточно чувствительным с этой точки зрения является алгебраический подход к задаче о допусках, развиваемый в [3,4]. Он требует нахождения алгебраического интервального решения системы $\mathbf{A}\,x = \mathbf{b}$, которое (если существует) и принимается за решение соответствующей ЛЗД. Заключение о разрешимости или неразрешимости задачи принимается при этом в процессе построения её решения. Данный подход иногда позволяет распознать разрешимость и тех задач, в отношении которых "тест средней системы" из [2,5,7,10] не работает. К сожалению, алгебраическое интервальное решение системы $\mathbf{A}\cdot x = \mathbf{b}$ может не существовать даже тогда, когда линейная задача о допусках разрешима. Это демонстрируется примером одномерной ЛЗД с $\mathbf{A}=[-1;2]$, $\mathbf{b}=[-2;6]$. Алгебраическое интервальное решение уравнения $[-1;2]\cdot x = [-2;6]$ не существует, но $X_*=[-1;2] \neq \emptyset$.

Нетрудно показать, что допустимое множество решений ИСЛАУ является выпуклым многогранным множеством в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [7,10,15]) с легко выписываемыми уравнениями ограничивающих его гиперплоскостей. Следовательно, множество $X_*(\mathbf{A},\mathbf{b})$ представимо как область допустимых точек некоторой задачи линейного программирования, а вопрос о его непустоте (т.е. о совместности ЛЗД) может быть решён путём применения к этой задаче первого этапа стандартного симплекс-метода. Впервые в явном виде соответствующая линейная программа была выписана И.Роном в [15]. Впоследствии к аналогичным результатам независимо пришёл Н.А.Хлебалин [6], который сводил к решению полной задачи линейного программирования и дальнейшее построение гипербруса наибольшего периметра, включенного в $X_*(\mathbf{A},\mathbf{b})$.

Детальное исследование разрешимости линейной задачи о допусках и некоторых других связанных с этим вопросов может быть проведено с помощью критерия из [8], основанного на безусловной максимизации специального "распознающего" функционала $\mathrm{Inn}(x;\mathbf{A},\mathbf{b})$ (в [2] и некоторых других работах он фигурирует как функционал $\mathrm{Tol}(x;\mathbf{A},\mathbf{b})$). Похожий подход, но с меньшими возможностями, предложен также в [1]. Вместе с тем, будучи наиболее информативными, алгоритмы из [1,6,8,15] требуют и значительных вычислительных затрат.

Цель настоящей работы - дать простой достаточный признак неразрешимости линейной задачи о допусках, основанный на сравнении относительных ширин элементов матрицы $\mathbf{A}$ и вектора правых частей $\mathbf{b}$. Его назначение - предварительный грубый анализ предъявляемой к решению ЛЗД.

Обозначим через $\underline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{a}}$, соответственно, левый и правый концы интервала $\mathbf{a}$. В [11] Х.Рачеком для характеризации "относительной узости" интервалов введён функционал

$$\chi(\mathbf{a}) = \begin{cases} \underline{\mathbf{a}}/\bar{\mathbf{a}}, & \text{если } |\underline{\mathbf{a}}| \leqslant |\bar{\mathbf{a}}|, \\ \bar{\mathbf{a}}/\underline{\mathbf{a}} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Он определён для всех ненулевых интервалов $\mathbf{a}$, причём

I) $-1 \leqslant \chi(\mathbf{a}) \leqslant 1$, и $\chi(\mathbf{a})=1$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$,

II) $\chi(\mathbf{a}) = \chi(\mathbf{b})$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{a}=t\mathbf{b}$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$,

III) если $\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b}$ и $\chi(\mathbf{a}) \geqslant 0$, то $\chi(\mathbf{a}) \geqslant \chi(\mathbf{b})$,

IV) если $\mathbf{a}+\mathbf{b} \neq 0$, то $\chi(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \leqslant \max\{\chi(\mathbf{a}), \chi(\mathbf{b})\}$.

Доказательства (I)-(IV), а также другие полезные свойства функционала χ можно найти в [12].

Прежде чем сформулировать основной результат работы , отметим, что если в i-ой строке интервальной матрицы $\mathbf{A}$ все элементы - нули, то для разрешимости соответствующей линейной задачи о допусках необходимо, чтобы и $\mathbf{b}_i \ni 0$. С другой стороны, при выполнении этого условия разрешимость или неразрешимость рассматриваемой ЛЗД определяются, как легко понять, уже только другими, не i-ми, строками матрицы $\mathbf{A}$ и компонентами вектора $\mathbf{b}$. Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что $\mathbf{A}$ не содержит нулевых строк.

Теорема. Пусть в линейной задаче о допусках с интервальной $m \times n$-матрицей $\mathbf{A}=(\mathbf{a}_{ij})$ и интервальным n-вектором правых частей $\mathbf{b}=(\mathbf{b}_i)$ для некоторого $k \in \{1,2,\ldots,m\}$ справедливы условия

$$\text{(i)} \quad 0 \notin \mathbf{b}_k ,$$

$$\text{(ii)} \quad \max_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ \mathbf{a}_{kj} \neq 0}} \chi(\mathbf{a}_{kj}) < \chi(\mathbf{b}_k) .$$

Тогда данная ЛЗД неразрешима.

Доказательство. Предположим, что рассматриваемая задача о допусках всё-таки имеет решение $y \in X_* \neq \varnothing$. Условие (i) делает, очевидно, невозможным равенство нулю выражения

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{kj} y_j .$$

Поэтому законное использование свойств (IV) и (II) функционала

χ приводит к неравенству

$$\chi\left[\sum_{j=1}^{n} a_{kj}y_j\right] \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}\{\chi(a_{kj}y_j)\,|\,a_{kj}y_j\neq 0\} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}\{\chi(a_{kj})\,|\,(a_{kj}\neq 0)\&(y_j\neq 0)\}\ , \qquad (*)$$

где множества в фигурных скобках (под знаками максимумов) – непустые. Но в силу нашего предположения $Ay \subseteq b$, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \subseteq b_i \quad \text{для всех } i\in\{1,2,\ldots,m\}.$$

Благодаря (i) к этим неравенствам можно применить свойство (III) функционала χ, что даёт, в частности,

$$\chi\left[\sum_{j=1}^{n} a_{kj}y_j\right] \geqslant \chi(b_k)\ .$$

Следовательно, привлекая (*), найдём

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{\chi(a_{kj})\,|\,(a_{kj}\neq 0)\&(y_j\neq 0)\} \geqslant \chi(b_k).$$

Этим противоречием с условием (ii) и завершается доказательство теоремы.

Важность всех условий теоремы можно уяснить на упоминавшемся примере одномерной ЛЗД с $A=[-1;2]$, $b=[-2;6]$. Поскольку условие (i) здесь не выполнено, задача о допусках разрешима, хотя $\chi(A) = -1/2 < -1/3 = \chi(b)$. Более содержательное объяснение заключается в том, что свойство (III) функционала χ уже не является справедливым для интервалов, содержащих внутри себя нуль :

$$[-1;1] \subseteq [-1;2] \subseteq [-2;2]\ ,$$

$$\text{но}\quad \chi([-1;1])=\chi([-2;2])=-1,\ \chi([-1;2])=-1/2.$$

В заключение работы отметим, что описанный выше признак неразрешимости линейной задачи о допусках аналогичен по форме критерию разрешимости одного линейного интервального уравнения, полученному Х.Рачеком и В.Зауером в [12] также с применением функционала χ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Бочков А.Ф., Евтушенко Т.В. Один подход к выбору стационарных режимов технологических процессов в условиях неопределённости. - М., 1988. - Деп. в ВИНИТИ, № 2891 - В88.

2. Добронец Б.С., Шайдуров В.В. Двусторонние численные методы. - Новосибирск : Наука, 1990. - 208 с.

3. Захаров А.В., Шокин Ю.И. Алгебраическое интервальное решение систем линейных интервальных уравнений $\mathbf{A}x=\mathbf{b}$ и $\mathbf{A}x+\mathbf{d}=\mathbf{b}$. - Красноярск, 1987.- 17 с.- (Препринт/ ВЦ СО АН СССР; № 5).

4. Морланг А.А., Авдеев Л.А., Колмогоров В.Г. Исследование режима трёхузловой схемы электрической сети методами интервального анализа / Информационно - оперативный материал. Часть 1. - Красноярск, 1990. - С. 21-25. - (Препринт/ ВЦ СО АН СССР ; № 17).

5. Хлебалин Н.А. Аналитический метод синтеза регуляторов в условиях неопределённости параметров объекта // Аналитические методы синтеза регуляторов. - Саратов : Саратовский политехн. институт, 1981.- С. 107-123.

6. Хлебалин Н.А. Синтез интервальных регуляторов в задаче модального управления / Аналитические методы синтеза регуляторов. - Саратов : Саратовский политехн. институт, 1988. - С. 26-30.

7. Шайдуров В.В., Шарый С.П. Решение интервальной алгебраической задачи о допусках. - Красноярск, 1988. - 27 с. - (Препринт / ВЦ СО АН СССР ; № 5).

8. Шарый С.П. О некоторых методах решения линейной задачи о допусках. - Красноярск, 1989. - 45 с. - (Препринт / ВЦ СО АН СССР ; № 6).

9. Nuding E., Wilhelm J. Über Gleichungen und über Lösungen // ZAMM.- 1972.- Bd.52.- S. T188-T190.

10. Neumaier A. Tolerance analysis with interval arithmetic // Freiburger Intervall-Berichte.- 1986.- № 6.- S. 5-19.

11. Ratschek H. Teilbarkeitskriterien der Intervallarithmetik// J. Reine Angew. Mathematik. - 1972. - Bd. 252.- S. 128-138.

12. Ratschek H., Sauer W. Linear interval equations // Computing.- 1982.- Vol.28, № 2.- P. 105-115.

13. Rohn J. Input-output planning with inexact data // Freiburger Intervall-Berichte.- 1978.- № 9.- S. 1-16.

14. Rohn J. Input-output model with interval data // Econometrica.- 1980.- Vol.48, № 3.- P. 767-769.

15. Rohn J. Inner solutions of linear interval systems // Interval Mathematics 1985 / Ed.: K.Nickel - New York etc.: Springer Verlag, 1986. - (Lecture Notes in Computer Science ; vol.212). - P. 157-158.

660 036 г. Красноярск
Академгородок
Вычислительный Центр СО АН СССР
лаб. 1.1 "Численного анализа"