ОБ ИНТЕРВАЛЬНЫХ РАСШИРЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

Б.С.Добронец, В.И.Сенашов

В работе представлен алгоритм нахождения интервального расширения для квадратичной формы, а также предложен подход для нахождения интервального расширения для полинома произвольной степени.

ON INTERVAL EXTENSIONS OF SOME CLASSES OF FUNCTIONS

B.S.Dobronets, V.I.Senashov

The algorithm for finding the interval extension for quadratic form is introduced in this paper, and besides the approach to finding the interval extension for polynomials of any degree is suggested.

Для нахождения интервальных расширений функций многих переменных разработан ряд методов (см.например [1-3]). Они дают с той или иной точностью интервальные расширения функций и в некотором смысле являются универсальными. Это требование универсальности в применении к функциям некоторого конкретного вида уподобляется применению многотонного пресса для раскалывания грецкого ореха.

Нашей задачей будет подобрать для этой цели небольшой молоточек. А именно: предлагается метод нахождения интервального расширения для функций вида

$$f = \sum \alpha_{ij} x_i x_j \text{ , где } x_0 = 1,$$

с интервальными коэффициентами. В работе [4] описан метод получения интервальных расширений для функций такого вида.

Здесь мы приводим другой вариант этого метода, содержащий ряд принципиальных улучшений.

В работе используются следующие обозначения: для интервалов употребляются двойные прописные и жирные строчные буквы, например, $\mathbf{a}, \mathbb{A}, \mathbb{X}$; обозначение $\dim \mathbb{A}$ означает размерность интервала $\mathbb{A}$.

Пусть дана функция f указанного выше вида. Алгоритм состоит из двух частей – оценка максимума функции f на интервале A сверху и оценка минимума f на интервале A снизу. Так как эти две части полностью аналогичны, то приведем только оценивание максимума f на интервале A сверху.

1. Проводим тест на монотонность f на A – в результате уменьшаем размерность интервала A – образуем интервал $\bar{A}$.

Тест на монотонность делаем следующим образом: ввиду линейности частных производных f_{x_k} для функции f оптимальное интервальное расширение на интервале A совпадает с естественным интервальным расширением, которое мы и вычисляем для производных по каждой переменной. Здесь нами используется

Теорема 1. Пусть $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ – рациональное выражение, в котором каждая переменная встречается не более одного раза и только в первой степени, $F(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n)$ – естественное интервальное расширение функции $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $\bar{f}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n)$ – объединенное интервальное расширение $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Тогда $\bar{f}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots\mathbf{x}_n)=F(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n)$ для любого набора $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n$ такого, что $F(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n)$ имеет смысл ([1]).

Для тех переменных x_k, по которым удалось установить на этом шаге отделенность f'_{x_k} от нуля, производим замену в интервале A значения $\mathbf{a}_k$ k-ой координаты на $\underline{a}_k$ или $\bar{a}_k$ в соответствии со знаком производной f'_{x_k}. После этого шага аналогично исследуем отделенность f'_{x_k} от нуля на интервале A_1 по переменным x_k, по которым координаты интервала A_1 интервальные, и по тем же, что и выше соображениям, формируем интервал $A_2 \subseteq A_1$. Продолжаем эту процедуру до тех пор, пока идет уменьшение размерности получающихся интервалов. Окончательно полученный интервал обозначим $\bar{A}$.

Выберем переменные x_1, просматривая те переменные, по которым выполнены два условия:

а) f не содержит квадрат данной переменной;

б) в интервале $\bar{A}$ по соответствующей координате стоит интервал ненулевой длины.

Затем изменяем вид функции f: при переменной такого вида можно привести подобные члены так, чтобы она встречалась не более одного раза и только в первой степени. Тогда она не будет давать вклада в ошибку при вычислении интервального расширения f на интервале A. Может оказаться, что при всех выделенных таким образом переменных, одновременно привести подобные не удастся. Тогда приводим подобные при тех переменных, при которых это возможно сделать одновременно и получаем функцию $\hat{f}$.

2. Вычисляем $\bar{F}$ –оценку максимума $\hat{f}$ сверху на интервале $\bar{A}$. По построению интервала $\bar{A}$ и функции $\hat{f}$ значение $\bar{F}$ будет также оценкой f сверху на интервале A. Эту оценку для функции нашего типа удобно делать с помощью метода Волкова [5], так как в нем используются оценки с помощью парабол по каждой переменной. В нашем случае параболы очень точно отражают поведение функции. В методе используется информация о вторых производных, которые являются у нас фиксированными интервалами. Целесообразно проделать сразу же оценку и с помощью естественного интервального расширения, а затем выбрать наименьшую из оценок за $\bar{F}$.

3. Вычисляем $\tilde{F}$ - значение $\hat{f}$ в средней точке интервала $\bar{A}$.

4. Если $|\bar{F}-\tilde{F}|<\varepsilon$, то счет заканчивается.

5. Делим $\bar{A}$ на три равных интервала по стороне наибольшей длины $\bar{A} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. В случае неудачного расположения интервала $\bar{A}$ для функций нашего вида, а именно, когда особенность находится в центре интервала, при делении интервала пополам особенность оказывается во всех вновь образованных интервалах. Поэтому выбрана методика деления интервала на три части, в результате чего особенность достаточно быстро локализуется в одном из интервалов разбиения. Разбиение по стороне наибольшей длины обеспечивает сходимость метода.

6. В этом пункте для новых интервалов A_1, A_2, A_3 и функции $\hat{f}$ проделываем такую же процедуру, как и в п.п. 1, 2, 3 для интервала A, находим значения $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3$ и функции $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3$.

7. Если $|\max\limits_i \bar{F}_i - \max\limits_i \tilde{F}_i|<\varepsilon$, то заканчиваем счет и принимаем $\bar{F}= \max\limits_i \bar{F}_i$.

8. Из дальнейшего рассмотрения выбрасываем интервалы A_i, для которых $\bar{F}_i < \max\limits_j \tilde{F}_j$. Здесь используется идея работы [5] отбрасывания тех интервалов, которые уже заведомо не содержат

точки максимума функции f на интервале $\mathbb{A}$.

9. Обозначим через $\bar{\mathbb{A}}$ интервал из оставшихся $\mathbb{A}_1$ с максимальным $\bar{F}_1$ и делим $\bar{\mathbb{A}}$ по стороне максимальной длины на три равных интервала $\bar{\mathbb{A}} = \mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2 \cup \mathbb{A}_3$. У остальных интервалов, оставшихся после пункта 8, сдвигаем нумерацию $\mathbb{A}_4, \mathbb{A}_5, \mathbb{A}_6$ и т.д. и идем на пункт 6.

Можно показать, что разбиение на подынтервалы интервала с наибольшей оценкой максимума обеспечивает достижение сколь угодно большой точности оценки.

Покажем на примерах, что в п.1 алгоритма, сделанные действия оправданы.

Пример 1. Пусть дана функция $f = 2x^2-2xy+y+2x$. Требуется найти ее интервальное расширение на интервале $\mathbb{A} = [0;1]\times[0;1]$. Согласно п.1 алгоритма находим естественные интервальные расширения частных производных $f'_x=[0;6]$, $f'_y=[-1;1]$. Таким образом, по переменной x на интервале $\mathbb{A}$ есть монотонность, а по переменной y монотонности нет. Уменьшаем размерность интервала $\mathbb{A}$, беря в качестве значений x верхнюю границу интервала [0;1] в соответствии со знаком производной f'_x для нахождения максимума и нижнюю для нахождения минимума. Образовали интервал $\mathbb{A}_1 = 1\times[0;1]$. Опять вычисляем частную производную $f'_y=-1$. Выяснили монотонность по переменной y и уменьшаем размерность интервала $\mathbb{A}_1$, образуем интервал $\mathbb{A}_2=1\times 0$. Это уже интервал нулевой ширины, и на этом вычисление максимума функции f на интервале $\mathbb{A}$ заканчивается. Для вычисления минимума поступаем аналогично. Таким образом, вычислили интервальное расширение функции f на интервале $\mathbb{A}$ – это интервал [0,4]. Полученное значение совпадает с оптимальным интервальным расширением.

Пример 2. Пусть дана функция $f=2xy+z^2+xz-2x+2z$. Требуется найти ее максимум на интервале $\mathbb{A} = [-1;1]\times[0;1]\times[0;1]$. Как и в примере 1, находим частные производные $f'_x=[-2;1]$, $f'_y=[-2;2]$, $f'_z=[1;5]$. Уменьшаем размерность интервала $\mathbb{A}$, образуем интервал $\mathbb{A}_1 = [-1;1]\times[0;1]\times 1$. Опять вычисляем $f'_x=[-1;1]$, $f'_y=[-2;2]$. Размерность дальше не уменьшается. Переменная x удовлетворяет двум указанным условиям алгоритма: не содержит члена x^2, и по переменной x в интервале $\mathbb{A}_1$ стоит интервал длины 2. Приводим подобные по переменной x. Получаем функцию $f=x(2y+z-2)+z^2+2z$.

Естественное интервальное расширение функции f совпадает с оптимальным интервальным расширением, так как все интервальные переменные встречаются только один раз и только в первой степени. Тогда мы находим естественное интервальное расширение f и тем самым получаем ответ $\max_{A} f = 4$. Аналогично находим минимум и получаем интервальное расширение функции f на A - интервал $[-2,4]$. Снова получили оптимальное интервальное расширение.

Данный алгоритм можно распространить для поиска интервальных расширений полиномов степени m от n переменных. Покажем для простоты как это делается на примере полинома третьей степени $f = \sum a_{ijk} x_i x_j x_k$.

В п.1 алгоритма оптимальное интервальное расширение частных производных функции f уже не будет совпадать с их естественным интервальным расширением. Из-за этого наличие монотонности по некоторым переменным может оказаться невыявленным. Для уточнения значений производных заметим, что они являются полиномами второй степени и необходимо установить либо отрицательность значения максимума частной производной на интервале A, либо положительность значения ее минимума на интервале A. Ставя задачу таким образом, мы редуцируем ее к предыдущему случаю - нахождению интервального расширения для полинома второй степени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Moore R.E. Interval analysis.- Englewood Cliffs. N.J.: Prentice-Hall, 1966.

2. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа.- Новосибирск: Наука, 1986.-224 с.

3. Hansen E. On solving system of equations using interval arithmetic.- Math.comput.,1968, V.22,P.374-384.

4. Сенашов В.И. Об одном алгоритме нахождения интервального расширения для квадратичной формы.- Красноярск, 1989.- С.23-25 (Препринт ВЦ СО АН СССР, N 2).

5. Волков Е.А. О поиске максимума функции и приближенном глобальном решении системы нелинейных уравнений // Труды матем. института АН СССР, 1974, Т.131.- С.64-80.