ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ –
ПРЕДМЕТ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПОЛЕЗНЫЙ ИНСТРУМЕНТ

А.Г.Яковлев

Кратко описано состояние дел в области интервальных вычислений – исследовательского направления, включающего в себя интервальную математику, разработку соответствующих компьютерных средств и приложения в науке и технологии. Изложена идея интервального подхода и указаны его сравнительные достоинства, рассказано о его развитии в самостоятельное исследовательское направление, дана информация о публикациях, научных мероприятиях, библиографической деятельности, географии распространения интервальных вычислений в мире и их развитии в СССР.

<u>1. Два подхода к числовому вычислению</u>. За время своего развития классическая математика накопила достаточно большой арсенал численных методов. Формулировались эти методы в терминах абстрактных математических объектов, важнейшим из которых было вещественное число. Однако попытки прямого использования таких методов всегда наталкивались на одну и ту же трудность: в практических вычислениях можно использовать только конечные представления (то есть цепочки символов ограниченной длины), а не всякое вещественное число имеет точное конечное представление. Это относится как к исходным данным, так и к промежуточным результатам численных вычислений. В итоге обычной оказывается ситуация, когда не удается получить точное конечное представление и окончательного результата. Таким образом, возникает проблема соотнесения вычисленного конечного приближенного результата и истинного абстрактного решения поставленной задачи.

В настоящее время применяются два основных подхода к решению данной проблемы. Первый из них состоит в том, что вместо абстрактных математических объектов, таких, как вещественные числа, векторы и матрицы, в качестве приближений используются объекты того же класса, но имеющие точное конечное представление, например, рациональные числа некоторого конечного множества, из которых составляются также векторы и матрицы. При этом вычисление сопровождается ручным оцениванием погрешностей (то есть отклонений приближенных значений от точных) для каждой из входящих в вычисление операций. Этот подход сравнительно успешно применялся в докомпьютерную эру, когда человек, производивший вычисления, мог позволить себе считать оценку погрешности даже промежуточного результата самостоятельной творческой задачей и использовать для ее решения весь арсенал имеющихся у него средств: от перехода на повышенную разрядность промежуточных результатов до учета особых свойств участвующих в вычислении конкретных чисел и функций.

Широкое использование ЭВМ в вычислительной практике сразу показало ограниченность описанного подхода – ведь при массовых вычислениях по достаточно сложным алгоритмам невозможно оценку каждого промежуточного результата рассматривать как самостоятельную задачу, необходима единая унифицированная техника такой оценки. Желание распространить описанный подход на решение численных задач с помощью ЭВМ привело к попыткам построить для каждого численного метода аналитическую зависимость погрешности результата от погрешностей исходных данных и округлений. Хотя на этом пути и были достигнуты определенные успехи (связанные прежде всего с именем Дж.Уилкинсона [1]), но все же сейчас уже можно сказать, что в целом эти попытки не достигли намеченной цели. В качестве причин неудачи можно указать следующие: вычисления по формулам, связывающим погрешность исходных данных с погрешностью результата, сами неизбежно производятся с погрешностью; в этих формулах должны присутствовать параметры (разрядность, основание системы счисления и т.д.), характеризующие систему команд той ЭВМ, на которой будет происходить вычисление, что не позволяет применить эти формулы для любой ЭВМ; в этих формулах невозможно учесть индивидуальную точность операндов – отсюда грубость оценки конечного результата; главной же причиной является трудность получения реалистичной оценки погрешности результата достаточно нетривиального вычисления - подобная задача по сложности зачастую сопоставима с разработкой самого численного метода.

Кроме того, серьезный изъян имеется в самой идее замены точного значения одним приближенным. Дело в том, что в этом случае не гарантируется, вообще говоря, корректность проверки числовых соотношений: если у вас в программе имеется, например, оператор

```
if x < 0 then A else B,
```

а x вычисляется приближенно, то вы никогда не сможете быть уверены в правильности ветвления, поскольку, скажем, вычисленное значение 0.013 может заменять точное значение x, равное -0.02.

Подводя итоги, можно сказать, что первый подход оказался во многих случаях полезен (особенно в линейной алгебре) для исследования сравнительной точности и устойчивости численных методов, но не позволил гарантировать корректность вычислений по ветвящимся алгоритмам (заметим, что большинство алгоритмов являются ветвящимися!), а главное - не дал возможности получить надежный ответ на самый простой и естественный вопрос типа: сколько верных цифр присутствует в полученном численном результате? Как следствие, пользователь системы программирования для численных приложений не может уверенно сказать, с какой точностью будет подсчитана, например, такая величина, как exp(0.0001).

В результате у критически настроенных исследователей все чаще стал возникать вопрос, послуживший названием работы [2]: "Можем ли мы доверять результатам наших вычислений?" Осознание остроты этого вопроса заставило многих из них (в том числе и автора [2]) обратиться ко второму подходу - интервальному.

Суть данного подхода состоит в том, что неизвестное точное значение заменяется не единственным элементом того же класса, как при первом подходе, а конечно-представимым множеством элементов, содержащим в себе этот неизвестный элемент. Название "интервальный" данный подход получил в связи с тем, что интервал, представляемый обычно парой рациональных чисел-границ, является простейшим видом конечно-представимого множества, локализующего простейший абстрактный объект – вещественное число. Для удобства дальнейшего обсуждения будем использовать следующие (необщепринятые) термины: неизвестный абстрактный математический объект станем называть ядром, содержащее его множество – оболочкой, а пару (ядро, оболочка) – локусом. Таким образом, локус можно уподобить неповрежденному ореху, с ядром которого можно что-то делать только путем оперирования с его оболочкой.

В рамках интервального подхода исходные данные и промежуточные результаты вычисления представляются в виде локусов (с заменой неизвестных значений возможно более точно приближающими их оболочками), а сами операции производятся только над оболочками. При этом все операции (прежде всего арифметические) определяются таким образом, что не вычисляемый реально результат точной операции над ядрами аргументов обязательно принадлежит вычисленной оболочке-результату. Вычисление, направленное на получение оболочки для ядерного решения поставленной математической задачи (его локализацию), обычно и называют интервальным (хотя более точно его следовало бы называть локализационным).

Интервальный подход позволяет единообразным способом учесть все виды погрешностей вычислительного процесса: приближенно известные исходные данные заключаются в гарантированно содержащие точное значение оболочки, погрешности округлений лишь несколько расширяют оболочки промежуточных результатов, а остановка бесконечного математического процесса хотя и ограничивает точность локализации результата, но не приводит к отсутствию гарантированности. Главные преимущества интервального подхода – автоматический учет всех видов погрешностей в процессе самого вычисления и гарантированная точность результата (если, скажем, вы получили результат [1.71718, 1.71901], то тем самым вам гарантируется верность его первых трех цифр). Корректным образом теперь могут быть проверены числовые соотношения (достаточно предусмотреть в программе все случаи взаимного расположения оболочек сравниваемых величин). При машинной реализации особенности конкретной ЭВМ учитываются только при программировании самих операций; разработчик численной программы может об этих особенностях вообще ничего не знать. Наконец, индивидуальная точность операндов непосредственно влияет на точность результата любой интервальной операции (так называемое свойство монотонности включения).

Итак, интервальный подход лишен главных недостатков, присущих первому подходу. Можно указать и на важное дополнительное преимущество: если одна и та же задача решается различными численными методами, то результаты вычислений по этим методам можно пересекать с тем, чтобы 1) отобрать более точный метод, 2) сделать окончательный результат (собственно пересечение) более точным, чем полученный любым из методов в отдельности, 3) проконтролировать разработку и программирование методов (пустота пересечения свидетельствует об ошибке).

Как видим, второй подход обладает несомненными преимуществами перед первым. Однако есть ли у него свои недостатки? Конечно, они имеются, хотя и несоизмеримы с преимуществами. Главный из них – неоправданное падение точности, когда в вычислении участвуют зависимые переменные или константы. Проиллюстрируем этот эффект на простейшем примере. Согласно правилам интервальной арифметики вычитание интервалов определяется следующим образом:

$$[a, b] - [c, d] = [a-d, b-c].$$

Следовательно, при выполнении операции X–X над интервалом X, ширина которого отлична от нуля, никогда не будет получен точный результат [0, 0], а всегда – более широкий, хотя и обязательно содержащий [0, 0]. Причина этого явления состоит в том, что операции над оболочками всегда определяются из расчета на "худший" случай взаимного расположения ядер внутри операндов – это необходимо для выполнения свойства гарантированности. Частичному, а в некоторых случаях и полному преодолению данного эффекта посвящен целый ряд исследований.

Другой недостаток второго подхода по сравнению с первым – большая сложность базовых операций и, как следствие, большая ресурсоемкость вычисления в целом. Этот недостаток, однако, может быть полностью устранен использованием специального программно-аппаратного обеспечения (см. п. 4).

О других сравнительных недостатках, неотделимых от самой идеи интервального подхода, автору ничего неизвестно.

2. Кратко об истории интервальных вычислений. Хотя идея приближения абстрактного математического объекта с помощью заключения его в конечно-представимое множество уходит своими корнями в глубокую древность, тем не менее ее систематическая разработка началась лишь в связи с широким применением ЭВМ в вычислительной практике. Первые попытки использования интервального подхода в решении конкретных задач численного анализа относятся к рубежу 50-60-х гг. Решающим шагом на пути оформления идеи в самостоятельное математическое направление стала написанная в 1966 г. основополагающая монография Р.Мура [3]. Первоначально это направление получило название "интервальный анализ", а в связи с расширением круга решаемых задач чаще стал употребляться термин "интервальная математика".

Согласно результатам наукометрического исследования [4], полученным на основе количественного анализа наиболее полной библиографии (ее версия, несколько более ранняя по сравнению с исследованной в [4], опубликована в [5, 6]), с конца 50-х гг. до начала 80-х гг. число публикаций по вопросам интервальных вычислений росло экспоненциально, а затем стабилизировалось на уровне приблизительно 150 в год. В [4] сделан вывод не только о быстром развитии, но и о самостоятельности исследовательского направления в целом (об этом свидетельствует специфический характер некоторых наукометрических распределений).

Вообще говоря, с интервальными вычислениями связаны три направления научной и технологической деятельности:

- математическое - включающее исследование математических проблем интервальных вычислений;
- компьютерное - рассматривающее вопросы создания и использования компьютерных средств для выполнения интервальных вычислений;
- прикладное - связанное с применением результатов интервальной математики и соответствующих компьютерных средств в различных областях науки и технологии.

Коротко остановимся на каждом из этих направлений.

3. Интервальная математика. В настоящее время интервальная математика – это прежде всего основанный на интервальном подходе численный анализ. Интервальный численный анализ включает в себя такие области, как линейная алгебра, решение разнообразных уравнений и систем уравнений, оптимизация и т.д., то есть по названиям разделов в основном дублирует традиционный численный анализ. Существуют, впрочем, и специфические разделы: например, большое число работ посвящено различным методам вычисления рациональных интервальнозначных функций. Некоторые задачи традиционного численного анализа имеют различные интервальные постановки. Приведем простейший пример: задача нахождения корня x уравнения

$$a + x = b,$$

где a и b – вещественные числа, в интервальной постановке может быть сформулирована двумя способами (A и B – интервалы):

1) найти интервал X такой, что $A + X = B$;

2) найти интервал X такой, что $X = B - A$.

(Решение первой задачи является подмножеством решения второй.)

В отличие от традиционного подхода, в интервальных алгоритмах широко используются теоретико-множественные операции: например, приближение, полученное на (n–1)-й итерации, с целью уточнения пересекается с приближением, полученным на n-й итерации. Операндами этих, а также арифметических операций могут быть локусы, построенные из математических объектов разнообразных классов: замкнутых, открытых, полуоткрытых и бесконечных интервалов на вещественной оси; кругов, прямоугольников, секторов и других фигур на комплексной плоскости; шаров, параллелепипедов, конусов в многомерном случае; из всех названных объектов могут составляться векторы и матрицы и т.д. Точность метода теперь характеризуется некоторой величиной, соответствующей "размеру" оболочки окончательного результата. Она может быть оценена и до реального вычисления подобно тому, как это делается при первом упомянутом в п. 1 подходе.

К интервальной математике обычно относят и некоторые исследования, не связанные непосредственно с разработкой конкретных численных методов, например, установление алгебраических свойств какой-либо системы локусов или оценку сложности решения интервальной задачи безотносительно к методу решения (является ли, скажем, задача NP-сложной). Имеются также работы, в которых совместно используются понятия интервальной математики и вероятностно-статистические понятия: например, исследовались интервальные арифметики с вероятностными и статистическими распределениями внутри интервалов.

Классическими монографиями по интервальной математике являются [3, 7, 8], весьма часто цитируются сборники [9-11].

В последние годы внутри интервальной математики наметилась тенденция к комбинированию в одном методе традиционных и интервальных вычислений. Осуществляется такое комбинирование следующим образом: сначала с помощью традиционных вычислений находится приближенное решение задачи, причем в качестве исходных данных используются числа-представители оболочек точных исходных данных, а затем это решение с помощью интервальных вычислений расширяется на всю область определения исходных данных. Тем самым подобные методы совмещают в себе достоинства обоих изложенных в п. 1 подходов. В западной литературе такие методы получили название "методы включения (inclusion methods)". В советской монографии [12], где эти методы являются основным предметом исследования, они названы двусторонними. Представляется, что собственно интервальные и комбинированные методы можно было бы собирательно назвать локализационными, поскольку и те и другие отличаются от прочих методов тем, что локализуют (ограничивают) точное решение соответствующей задачи классической математики. Математическое направление, занимающееся разработкой и исследованием локализационных методов, могло бы получить название "теория локализационных вычислений".

<u>4. Компьютерный инструментарий для выполнения интервальных вычислений.</u> Еще на заре развития интервальной математики были осуществлены первые эксперименты по реализации интервальных вычислений на ЭВМ. Реализация осуществлялась обычно следующим способом: интервальные операции программировались на языке типа Алгола или Фортрана и оформлялись в виде библиотеки подпрограмм. Использовать подобные библиотеки было крайне

неудобно из-за отсутствия в подобных языках возможности конструировать разнообразные типы данных, соответствующие классам локусов, и определять над элементами этих типов инфиксные операции: большая часть текста программы представляла собой последовательности вызовов подпрограмм .с раздутыми интерфейсами. Кроме того, такой способ реализации приводил к значительному (до двух порядков) замедлению выполнения программы по сравнению с обычными вычислениями с плавающей точкой.

Впоследствии был опробован и другой подход: использование языков с богатыми средствами конструирования типов и определения операций, таких, как Алгол-68 и Ада. Лаконичность и выразительность программного текста значительно возросли; замедление в этом случае не превосходило одного порядка. Основными препятствиями на пути широкого использования таких языков стало отсутствие их компиляторов на многих современных мини- и микро-ЭВМ, а также невозможность эффективной реализации на этих языках операций с оптимальным направленнным округлением результатов, необходимым для наиболее точного учета погрешностей округления.

Итогом экспериментирования стала победа третьего подхода. Он состоит в том, что реализация численных методов осуществляется не на универсальном языке программирования, а на языке, специально спроектированном для численного программирования на основе интервального подхода. Такой язык обычно содержит либо достаточно богатый набор предопределенных типов и операций, либо имеет удобные и эффективные средства доступа к предопределенному пакету, содержащему описания таких типов и операций, и необходимые средства для конструирования новых типов и операций. Первоначально программа на подобном языке перед выполнением с помощью препроцессора конвертировалась на какой-нибудь распространенный язык программирования, но затем появились специальные трансляторы. Наиболее значительными достижениям здесь можно считать разработку трансляторов с языков FORTRAN-SC (для IBM-360/370) [13] и PASCAL-SC (для персональных ЭВМ, в частности, для IBM PC) [14]. Замедление по сравнению с обычной плавающей точкой не превосходило в этом случае нескольких раз. Дальнейший рост быстродействия требует уже микропрограммной и аппаратной поддержки базовых операций.

На микропрограммную и аппаратную поддержку интервальных вычислений ориентирован целый ряд экспериментальных разработок. Так, например, существует реализация FORTRAN-SC, использующая микропрограммно поддержанный пакет ACRITH [13]; имеются и специально спроектированные процессоры. С учетом требований интервальных вычислений разрабатывались известные стандарты на машинную арифметику ANSI/IEEE-754 и ANSI/IEEE-854. Сегодня подавляющее большинство микропроцессоров, имеющих команды с плавающей точкой, изготавливаются в соответствии с этими стандартами.

Вместе с тем продолжается разработка программных пакетов, реализующих всевозможные обобщения интервальной арифметики, вычисления с переменной разрядностью и нестандартными числовыми представлениями, включающих в свой состав как элементарные функции, так и целые библиотеки численных методов. Программируются эти пакеты на самых различных языках - от Си до Пролога.

В последнее время набирает силу прогрессивная тенденция объединения численно-интервальных и символьно-аналитических (компьютерно-алгебраических) систем программирования. Подобное объединение позволяет совместить достоинства обоих подходов: производить аналитические выкладки, сопровождая их получением численных результатов с гарантированной и управляемой точностью. Использование символьно-аналитических преобразований дает возможность в ряде случаев улучшить точность самого интервального вычисления.

С развитием компьютерного направления в целом по состоянию на 1987 год можно познакомиться по обзору [15].

<u>5. Приложения интервальных вычислений.</u> За сравнительно недолгое время своего развития интервальные вычисления неоднократно служили мощным и надежным инструментом в различных областях науки и технологии. Прежде всего здесь необходимо упомянуть саму математику. С помощью интервальных вычислений удалось доказать целый ряд важных теорем, предполагающих в процессе своего доказательства сравнение сложных числовых выражений.

Поскольку из-за свойства гарантированности интервальные вычисления обладают доказательной силой, они и были использованы для автоматизации процесса доказывания (см. обзор [16], а также статью [17]).

Что же касается внематематических приложений, то они оказались возможны всюду, где адекватным способом формализации неопределенности, содержащейся в исходных данных и/или разультате, оказывалось указание разумных границ неизвестной величины. "Исходные данные лежат в таких-то границах (= принадлежат таким-то множествам) и связаны такими-то формулами с результатом. Можно ли указать разумные границы, в которых лежит (= указать множество, которому принадлежит) результат?" - такой способ математической формализации оказался во многих случаях значительно более простым и естественным, нежели, скажем, базирующийся на одном лишь вероятностно-статистическом подходе или теории размытых множеств.

Успех интервального подхода привел к тому, что в настоящее время уже почти невозможно уследить за распространением интервальных вычислений по прикладным областям. Так, автору настоящей статьи известны публикации, связанные с использованием интервальных вычислений в машиноведении и метрологии, химии и биологии, радиоэлектронике и электротехнике, геодезии и геофизике, экономическом планировании и прогнозировании, теории автоматического управления (возможно, наибольшее число приложений) и космических исследованиях, автоматизированном проектировании и машинной графике, разработке программного обеспечения общего назначения и даже в организации пожаротушения и огранке драгоценных камней. Список, разумеется, далеко не полный.

Темпы дальнейшего распространения интервальных вычислений в различных областях науки и технологии зависят, по-видимому, прежде всего от степени доступности для "неинтервальщиков" популярной и специальной литературы, а также соответствующих развитых программно-аппаратных средств.

С некоторыми приложениями интервальных вычислений можно познакомиться по обзору [18].

6. Научные мероприятия. Развитие интервального подхода и оформление его в самостоятельное исследовательское направление породили потребность в проведении специально ему посвященных научных мероприятий. Первое международное мероприятие по данной тематике - Symposium on Interval Analysis - состоялось в 1968 г. в Великобритании. В дальнейшем крупнейшими мероприятиями подобного рода были проходившие в 1975 [9], 1980 [10] и 1985 [11] гг. в ФРГ симпозиумы под одинаковым названием International Symposium on Interval Mathematics. В 1982 г. провела международный симпозиум и ранее занимавшаяся интервальными исследованиями фирма IBM; симпозиум проходил в США и назывался A New Approach to Scientific Computation. После 1985 г. практически ежегодно проводится какое-либо крупное международное мероприятие, которое в значительной степени или целиком посвящено интервальным вычислениям. Из числа самых последних отметим Reliability in Computing: International Workshop on the Role of Interval Methods in Scientific Computing (США, 1987), International Symposium on Computer Arithmetic and Self-Validating Numerical Methods (Швейцария, 1989), International Symposium on Computer Arithmetic, Scientific Computation and Mathematical Modelling (Болгария, 1990). Материалы всех перечисленных мероприятий опубликованы.

Добавим, что некоторые страны, например Польша и СССР, регулярно проводят национальные научные встречи по данной тематике. Кроме того, результаты по исследованию и использованию интервальных вычислений постоянно докладываются на мероприятиях смежных областей, таких, как компьютерная алгебра, автоматическое управление и т.д.

7. Публикации. К настоящему моменту во всем мире на разных языках издано не менее полусотни книг (монографий, сборников, описаний компьютерных средств), специально посвященных интервальным вычислениям. Некоторые из них, например [7], могут служить учебником при изучении этого направления в рамках специального университетского курса.

Для слежения за текущим состоянием исследований наибольший интерес представляют, конечно же, периодические издания. В [4] приведен список десяти журналов, опубликовавших наибольшее число статей "интервальной" тематики. Вот этот список (в порядке убывания числа статей): "Computing", "Z. Angew. Math. Mech.", "Numer. Math.", "SIAM J. Numer. Anal.", "Wiss. Z. Techn. Hochsch. Leuna-Merseburg", "BIT", "Comm. ACM", "J. Math. Anal. Appl.", "ACM Trans. Math. Software", "IEEE Trans. Comput." Как видим, возглавляют его журналы по вычислительной математике, представлено также компьютерное направление. Что же касается публикаций по приложениям интервальных вычислений, то почти все они разбросаны по изданиям, относящимся к соответствующим областям приложений.

До 1988 г. во Фрайбурге (ФРГ) выходило единственное в мире периодическое издание, специально посвященное интервальным вычислениям: "Freiburger Intervall-Berichte". К сожалению, после 100 выпусков (по 10 в год) оно прекратило свое существование. Можно считать, что настоящее издание – "Интервальные вычисления" – приняло от него свою эстафету.

Общее же число опубликованных работ, исходя из установленных в [4] тенденций и авторской оценки полноты обследованной библиографии, в настоящее время значительно превышает 3000.

<u>8. География.</u> Интервальные вычисления со времени своего возникновения прошли большой путь не только как исследовательское направление, но и в чисто географическом смысле. Сегодня трудно назвать хоть одну страну, сколько-нибудь причастную к большой науке, от Бразилии до Китая, в которой не велась бы исследовательская работа в области интервальных вычислений. Конечно, интенсивность исследований в разных странах варьируется в весьма широких пределах. Бесспорным лидером здесь все последние годы является ФРГ, за ней следуют США, СССР, страны Западной и Восточной Европы и т.д.

Показательно в этом отношении распределение по странам количества лидеров направления – наиболее активных и цитируемых авторов. Согласно [4] из восьми выявленных лидеров пятеро (Алефельд Г., Никель К., Кравчик Р., Ратшек Х, Кулиш У.) работают в ФРГ, трое (Мур Е., Ралл Л., Хансен Э.) – в США. Советские работы почти не цитируются западными авторами из-за языкового барьера и труднодоступности.

Крупнейшим в мире центром систематических исследований в области интервальных вычислений, особенно активно занимающимся развитием компьютерного направления, является Институт прикладной математики при Университете г. Карлсруэ (ФРГ).

Общее число исследователей, опубликовавших хотя бы одну работу в данной области, составляет сейчас по всему миру не менее 1000 человек.

9. <u>Библиографическая деятельность</u>. Неоднократно упоминавшаяся выше библиография продолжает поддерживаться, в том числе на машинном носителе. В настоящее время этой работой занимается Prof. Dr. H.Ratschek (Mathematisches Institut der Universität Düsseldorf, Universitätsstr. 1, 4000 Düsseldorf 1, FRG). При этом большая часть указанных в библиографии работ в виде оригиналов либо копий хранится там же, в открытой для всех желающих Interval Library.

Центром библиографирования советских работ является Вычислительный центр Сибирского отделения АН СССР (СССР, Красноярск, Академгородок, ВЦ СО АН СССР, обращаться к Б.С.Добронцу). Библиография насчитывает уже около 400 ссылок, имеются полные тексты большой части работ.

Наконец, специализированную библиографию по компьютерному направлению в интервальных вычислениях ведет автор настоящей статьи. Библиография включает сейчас приблизительно 350 ссылок.

Обе последние библиографии ведутся с помощью IBM PC и, соответственно, хранятся на машинном носителе.

<u>10. Интервальные вычисления в СССР.</u> Как уже было отмечено выше, из-за языкового барьера и труднодоступности работы советских исследователей почти неизвестны за рубежом. Поскольку одной из задач настоящего издания является налаживание международных связей между специалистами в области интервальных вычислений, постараемся вкратце описать ситуацию в СССР.

В Советском Союзе интервальные вычисления как самостоятельное направление начали развиваться с середины 70-х годов. В настоящее время проводятся исследования как математических проблем, так и в области компьютерного инструментария и приложений.

В математическом направлении исследования ведутся практически во всех разделах интервальной математики, но, пожалуй, наибольшее число работ посвящено исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений и задачам линейной алгебры. Разработан так называемый апостериорный интервальный анализ – универсальный метод, позволяющий эффективно бороться с первым упомянутым в п. 1 недостатком интервального подхода. На русском языке изданы оригинальные монографии по интервальной математике [12, 19], переведена на русский язык монография [8]. В ряде университетов читаются специальные курсы для студентов.

Активно развивается компьютерное направление: разработано несколько пакетов интервальных операций для различных типов ЭВМ, в том числе пакеты операций над числами переменной разрядности; построен экспериментальный транслятор с языка, позволяющего выполнять апостериорно-интервальные вычисления; имеется ряд теоретических работ, касающихся языковой поддержки и организации вычислительного процесса при выполнении интервальных вычислений на ЭВМ (включая вопросы параллелизма); накоплен определенный опыт совместного использования интервальных и компьютерно-алгебраических средств.

Постоянно ширится и круг прикладных исследований. Попытки использования интервальных вычислений имеются в большей части перечисленных в п. 5 областей. Лидируют здесь, по всей видимости, электротехника, радиоэлектроника и теория автоматического управления. В самой математике получен ряд серьезных результатов, основанных на использовании интервальных вычислений в качестве доказательных [16, 17].

Ежегодно проводятся Всесоюзные совещания по интервальной математике, на которых фактически представляются также компьютерное и прикладное направления. В 1989 г. в Саратове проведена первая конференция. Материалы этих мероприятий публиковались пока в виде сборников тезисов. К сожалению, на названных мероприятиях еще ни разу не присутствовали иностранные специалисты. Следует также заметить, что советские специалисты начали участвовать в зарубежных мероприятиях по данной тематике лишь с 1990 г.

Внутри СССР география исследований неуклонно расширяется. В настоящее время интервальными вычислениями занимаются в

Сибири, на Урале, в Центральной России, Киргизии, Узбекистане, на Украине, конечно, в Москве и Ленинграде и других местах. Наиболее крупная группа работает в ВЦ СО АН СССР в Красноярске; там же постоянно издаются препринты по данной тематике. Всего же насчитывается более 80 авторов опубликованных работ.

Литература

1. Wilkinson J.H. Modern error analysis // SIAM Rev. - 1971. - Vol. 13, N 4. - P. 548-568
2. Nickel K. Can we trust the results of our computing? // Mathematics for Computer Science : Proc. Symposium held in Paris, March 16-18, 1982. - S.l. : Association francaise pour la cybernetique et technique (AFCET), 1982. - P. 167-175
3. Moore R.E. Interval analysis. - Englewood Cliffs : Prentice Hall, 1966. - 145 p.
4. Шальков А.И., Яковлев А.Г. Интервальная математика в зеркале наукометрии // Конф. "Интервальная математика", [Саратов,] 23-25 мая, 1989. - Саратов, 1989. - С. 48-50
5. Garloff J. Interval mathematics. A bibliography // Freib. Int.-Ber. - 1985. - N 6. - P. 1-222
6. Garloff J. Bibliography on interval mathematics. Continuation // Freib. Int.-Ber. - 1987. - N 2. - P. 1-50
7. Moore R.E. Methods and applications of interval analysis. - Philadelphia : SIAM, 1979. - xi, 190 p.
8. Alefeld G., Herzberger J. Introduction to interval computations. - New York etc. : Academic Press, 1983. - xviii, 333 p. ; Рус. перев.: Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления / Пер. с англ. - М. : Мир, 1987. - 356 с.
9. Interval mathematics / Ed.: K.Nickel. - New York etc. : Springer Verlag, 1975. - vi, 331 p. - (Lect. Not. in Comp. Sci. ; Vol. 29)
10. Interval mathematics 1980 / Ed.: K.Nickel. - New York etc. : Academic Press, 1980. - XV, 554 p.
11. Interval mathematics 1985 / Ed.: K.Nickel. - New York etc. : Springer Verlag, 1986. - 227 p. - (Lect. Not. in Comp. Sci.; Vol. 212)
12. Добронец Б.С., Шайдуров В.В. Двусторонние численные методы. - Новосибирск : Наука, 1990. - 208 с.
13. Bleher J.H., Rump S.M., Kulisch U., Metzger M., Ullrich Ch., Walter W. FORTRAN-SC. A study of FORTRAN extension for engineering/scientific computation with access to ACRITH // Computing. - 1987. - Vol. 39, N 2. - P. 93-110
14. Bohlender G., Ullrich Ch., Gudenberg J. Wolff von. New developments in PASCAL-SC // SIGPLAN Not. - 1989. - Vol. 23, N 8. - P. 83-92
15. Яковлев А.Г. Интервальные вычисления на ЭВМ (краткий обзор) // Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. - М. : Мир, 1987. - С. 336-

16. Панков П.С., Баячорова Б.Д., Югай С.А. Доказательные вычисления на ЭВМ и результаты их применения в различных разделах математики // Кибернетика. - 1982. - N 6. - С. 111-124
17. Матиясевич Ю.В. Еще один машинный эксперимент в пользу гипотезы Римана // Там же. - С. 10, 22
18. Беляева Н.П. Практические приложения интервального анализа // Тр. 1-го сов.-болгар. семин. по числовой обработке, Переславль-Залесский, 19-24 окт., 1987 / Ин-т программных систем АН СССР. - Переславль-Залесский, 1988. - Деп. в ВИНИТИ 21.04.89, N 2634-В89. - С. 2-26
19. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. - Новосибирск : Наука, 1986. - 224 с.

Адрес автора: 113587, Москва, Кировоградская ул
д. 11, Ин-т новых технологий